

Сравнение диффеоморфных изображений на основе топологического анализа данных*

С. Н. Чуканов¹, С. В. Лейхтер²

ch_sn@mail.ru; leykhter@mail.ru

¹ ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, Россия, Омск, ул. Певцова, д. 13

² ФГБОУ ВО Сибирский государственный автомобильно–дорожный университет, Россия, Омск, ул. Мира проспект, д. 5

В работе рассмотрена задача сравнения начального и терминального изображений, которая решается на основе построения минимизируемого функционала, характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой траектории. При распознавании образов изображений объектов анализируется форма объекта с применением методов персистентных гомологий. Характеристики формы, определяемые топологическими методами, не зависят от координатного представления рассматриваемой формы и являются инвариантными при диффеоморфных преобразованиях. Отличительной особенностью использования персистентных гомологий по отношению к методам алгебраической топологии является получение большего количества информации о форме объекта.

Ключевые слова: распознавание образов; диффеоморфные преобразования; персистентные гомологии

DOI: 10.21469/22233792.4.2.03

1 Введение

Существуют различные методы решения задачи сравнения форм исходного изображения и терминального (целевого) изображения [10, 11]. Для анализа деформаций изображения от исходного к целевому в [2] рассматривается группа диффеоморфизмов, а деформация рассматривается как геодезическая (кратчайший путь) между исходным и целевым изображениями. Напомним, что дифференцируемое отображение $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ называется диффеоморфизмом для многообразий \mathcal{M}, \mathcal{N} , если оно является биективным и обратное отображение $f^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ также дифференцируемое. В этом случае многообразия \mathcal{M}, \mathcal{N} являются диффеоморфными ($\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$). Группа диффеоморфизмов дифференцируемого многообразия \mathcal{M} – это группа всех диффеоморфизмов $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Задача сравнения исходного и целевого изображений решается на основе метода построения минимизируемого функционала [2, 6], характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой траектории. Для решения задачи сравнения применяется метод частиц–ориентиров (наиболее важных точек на изображении) [8]. В работе приводится постановка задачи, основанная на построении и решении уравнений Гамильтона для группы диффеоморфизмов частиц – точечных ориентиров изображения.

При распознавании образов изображений объектов анализируется форма объекта, которая кодируется на основе метрического пространства – множества M , снабженного

*Работа выполнена при поддержке комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН I.5.1.7, проект 0314–2016–0020, и при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты №18–07–00526 и 18–08–01284

функцией расстояния $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $d(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет аксиомам: $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; $\forall x, y, z \in M$.

В случае анализа формы объекта используются геометрические, спектральные, топологические характеристики объекта. Геометрические характеристики объекта могут изменяться при диффеоморфных деформациях. Характеристики формы, определяемые топологическими методами, не зависят от координатного представления рассматриваемой формы и являются инвариантными при диффеоморфных преобразованиях.

Так как диффеоморфные отображения являются гомеоморфизмами, то топологические характеристики (числа Бетти и характеристика Эйлера) одинаковые для изображений при диффеоморфных отображениях. Однако при неточных диффеоморфных отображениях возможны изменения топологических характеристик. Знание изменения топологических характеристик (например, число Бетти изменяется от значения $\beta_1 = 0$ до значения $\beta_1 = 1$) не является достаточным для сравнения изображений: диффеоморфизм от эллипса до фигуры цифры восемь имеет такое же изменение топологических характеристик, как и диффеоморфизм от окружности до лемнискаты Бернулли ($\beta_1 = 1$) \rightarrow ($\beta_1 = 2$). По отношению к методам сравнения изображений на основе их диффеоморфного преобразования [12] в настоящей работе используется метод построения персистентных гомологий [3] для получения дополнительной информации и возможности более точного сравнения диффеоморфных изображений.

В работе применяются алгоритмы построения множеств персистентных баркодов для сравнения диффеоморфных изображений, которые являются вещественными значениями, принимаемыми персистентными гомологиями. Нахождение персистентных баркодов форм объектов позволяет изучать как непрерывные, так и дискретные структуры, что делает их использование полезным в вычислительной топологии. Отличительной особенностью использования персистентных гомологий по отношению к методам алгебраической топологии [7] является получение большего количества информации о форме объекта. Важным направлением применения персистентных гомологий является изучение инвариантов больших объемов данных.

2 Гамильтонова механика точечных ориентиров изображения

Представление диффеоморфного отображения изображений можно рассмотреть как эволюцию точечных ориентиров (наиболее важных точек) изображения на основе гамильтоновой механики. Рассмотрим параметризацию формы изображения с помощью частиц – точечных ориентиров. Пусть $q_i(t); i = 1, \dots, N$ используется для обозначения вектора положения i -й частицы и $p_i(t); i = 1, \dots, N$ – соответствующего вектора импульса в момент времени t . Если формально принять, что импульсы и скорости частиц связаны соотношением: $p_i = \mathcal{L} \cdot v_i$, где \mathcal{L} – линейный обратимый оператор (в механике соответствует инертной массе), то обратное соотношение: $v_i = \mathcal{L}^{-1} \cdot p_i = \mathcal{K} p_i$. Скалярное произведение векторов p_i и v_i , соответствующее метрике С.Л. Соболева [12], можно представить в виде: $\langle p_i, v_i \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{L} v_i, v_i \rangle_{L^2}$. Для оператора: $\mathcal{L} = \text{id} - \alpha \nabla^2$ в пространстве $\Omega = \mathbb{R}^2$ – обратным оператором формально является оператор: $\mathcal{K} = \mathcal{L}^{-1}$, который можно аппроксимировать скалярной функцией Гаусса [11]:

$$K(q_i - q_j) = \beta e^{-\alpha^{-2}(q_i - q_j)^T (q_i - q_j)}. \quad (1)$$

Поля импульсов и скоростей в пространстве с метрикой С.Л. Соболева могут быть построены из соотношений:

$$\begin{aligned} p_t(q) &= \sum_{i=1}^N \delta(q - q_i(t)) \cdot p_i(t); \\ v_t(q) &= \sum_{i=1}^N K(q - q_i(t)) \cdot p_i(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Построим минимизируемый функционал, который соответствует деформации изображения, представленного совокупностью точечных ориентиров, в виде:

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j=1}^N p_i^T K(q_i - q_j) p_j \right\} dt. \quad (3)$$

Так как $K(\cdot)$ аппроксимирует дифференциальный оператор \mathcal{L}^{-1} , то функционалу (3) соответствует: $J_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j} p_i^T \mathcal{L}^{-1} p_j \right\} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j} \langle \mathcal{L} v_j, v_j \rangle \right\} dt$.

Минимизация J_0 должна осуществляться по значениям векторов q_i, q_j и p_i, p_j . Но значения векторов q_i, q_j определяются начальными значениями $q_i(0), q_j(0)$ и решениями уравнений (4), поэтому минимизация осуществляется по начальным неизвестным значениям векторов $p_i(0), p_j(0)$. Задачу минимизации J_0 можно представить как задачу оптимального управления, связанную с гамильтонианом: $H_0(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_i^T K(q_i - q_j) p_j$.

Временная эволюция системы определяется уравнениями Гамильтона для векторов $p_i(t), q_i(t); i = 1, \dots, N$ [11]:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^N p_j(t) \nabla_{q_i} K(q_i(t) - q_j(t)) p_j(t); \\ \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N K(q_i(t) - q_j(t)) p_j(t). \end{aligned}$$

Используя для $K(q_i - q_j)$ скалярную функцию Гаусса (1), получим:

$$\nabla_{q_i} K(q_i - q_j) = -2\alpha^{-2} \beta (q_i - q_j) e^{-\alpha^{-2}(q_i - q_j)^T (q_i - q_j)}.$$

Если минимизируемый функционал J_0 принять в виде (3), а гамильтониан системы в форме: $H(q, p) = H_0(q, p) + \sigma^{-2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i - v_i(q))^2 = H_0(q, p) + \sigma^2 \sum_{i=1}^N p_i^2$, то уравнения Гамильтона для производных компонент $\dot{p} = (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^N p_j^T \nabla_{q_i} K(q_i - q_j) p_j; \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N K(q_i - q_j) p_j + \sigma^2 p_i. \end{aligned} \quad (4)$$

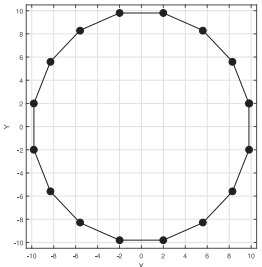
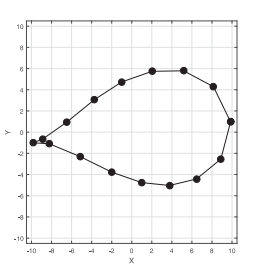
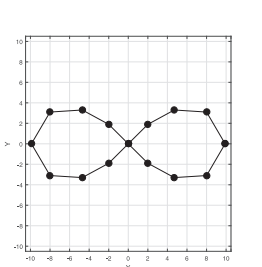
В функции Гамильтона $H(q, p)$ вводится штраф $\sigma^{-2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i - v_i(q))^2$ при наличии рассогласования $(\dot{q}_i - v_i(q))$.

Рассмотрим метод обучения в задаче нахождения диффеоморфизма $q_k(0) \rightarrow q_k(1)$ при минимизации функционала: $J^q = \sum_{i=1}^N [q_i(t) - q_i(1)]^2$, где $(q_1(t), \dots, q_N(t))$ целевое множество точек. Компоненты производной вектора \dot{q} и функционал J^q зависят от вектора p (см. (4)). Так как в системе дифференциальных уравнений (4) для вектора q заданы начальные условия $q(0)$ при $t = 0$, а для вектора p – терминальные: $p(1) = (0, \dots, 0)$ при $t = 1$, то для решения (4) получаем двухточечную краевую задачу. Сведение этой задачи к задаче Коши может быть проведено различными способами: стрельбы, квазилинеаризации, инвариантного погружения и т.д. Требуемый вектор начальных значений: $p(0) = (p_1(0), \dots, p_N(0))$ в настоящей работе находится методом градиентного спуска с градиентом функционала по вектору $p(0)$: $\nabla_{p(0)} J^q$.

2.1 Пример 1

Рассмотрим изменение топологии при преобразовании окружности ($\beta_1 = 1$) в лемнискату Бернулли ($\beta_1 = 2$), которые задаются 16 точками расположенными на кривых на основе интегрирования дифференциальных уравнений (4). Точки расположены в пределах квадрата $0 \leq x_i, y_i \leq 1; i = 1, \dots, 16$. В таблице 1 изображения при диффеоморфизме окружности (кривая 1) в лемнискату Бернулли (кривая 3) и промежуточное изображение (кривая 2).

Таблица 1

Изображения точек			
Наименование изображения	Кривая 1	Кривая 2	Кривая 3

В таблице 2 приведены значения функционалов J с гамильтонианом:

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \sigma^2 \sum_{i=1}^N p_i^2,$$

при сравнении изображений кривых и $\sigma^2 = 5; \alpha = 1; \beta = 1$. Длительность расчета де-

Таблица 2

Наименование изображения	Кривая 1	Кривая 2	Кривая 3
Кривая 1	0	5,7	21,5
Кривая 2	5,8	0	5,3
Кривая 3	21,5	5,3	0

формации составляет 3–4 минуты на компьютере с процессором Intel Pentium с тактовой

частотой 3,2 ГГц. Длительность расчета обусловлена использованием метода градиентного спуска для нахождения оптимального значения минимизируемого функционала J .

3 Построение персистентных гомологий для диффеоморфных изображений

На основе оценивания функционала J_0 (см. (3)) можно построить алгоритм распознавания изображений [12], но этот алгоритм требует проведение предварительной нормализации изображения и не является инвариантным по отношению преобразованиям координат. Поэтому алгоритмы распознавания инвариантные по отношению преобразованиям координат (coordinate-free) являются актуальными [4, 13]; к таким алгоритмам относятся алгоритмы вычислительной топологии [5] (см. Приложение).

Рассмотрим построение симплициальных комплексов из точечных облаков вложенных в \mathbb{R}^d . Пусть $S = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}; v_i \in \mathbb{R}^d$ – заданное множество точек. Для сравнения изображений, представленных множеством точечных ориентиров, можно использовать построение простейших комплексов Чеха и Вьеториса–Рипса из точечных облаков ориентиров v_i , построенных вокруг этих ориентиров.

Для $r \geq 0$ определим комплекс Чеха $\text{Cech}(S, r)$ с множеством вершин S согласно следующему правилу: симплекс $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ принадлежит $\text{Cech}(S, r)$, если замкнутые евклидовы шары $B(v_j; 0, 5r), j = 0, \dots, p$ имеют непустое общее пересечение.

Для $r \geq 0$ определим комплекс Вьеториса–Рипса $\text{Rips}(S, r)$ с множеством вершин S согласно следующему правилу: симплекс $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ принадлежит $\text{Rips}(S, r)$, если (см. (6)):

$$\|v_j - v_k\| \leq r; \forall j, k \in [0, \dots, p]$$

Комплекс Вьеториса–Рипса – наибольший симплициальный комплекс, имеющий те же вершины и ребра, что и комплекс Чеха. Определение комплекса Вьеториса–Рипса имеет смысл для точек в произвольном метрическом пространстве. Выбор метода Вьеториса–Рипса для построения точечных облаков в настоящей работе обусловлен применением пакета JavaPlex [1], так как в пакете JavaPlex автоматизировано нахождение баркодов и чисел Бетти точечных облаков симплициальных комплексов Вьеториса–Рипса.

При $r = 0$ числа Бетти множества k точек равны: $\beta_0 = k; \beta_i = 0, i \geq 1$; характеристика Эйлера: $\chi = \beta_0$. При диффеоморфных преобразованиях множества k точек эти топологические характеристики не изменяются. При изменении $r \in \mathbb{R}^+$ значения чисел Бетти и характеристик Эйлера сформированного комплекса Вьеториса–Рипса изменяются при соответствующих диффеоморфных преобразованиях. Существуют точки появления r_b (birth) и точки исчезновения r_d (death) нетривиальных классов гомологии (см. Приложение) и соответствующих чисел Бетти и характеристик Эйлера. Горизонтальные полуинтервалы в 2D полуплоскости $\{[b_i \dots d_i] | d_i \geq b_i \geq 0\}$ называются баркодами (здесь i – номер баркода). Баркоды, числа Бетти и характеристики Эйлера для точечных облаков можно определить с помощью пакетов JavaPlex [1] и Topology ToolKit [9].

Для двух конечных комплексов баркодов $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{I_\beta\}_{\beta \in B}$ рассмотрим отображение точечных множеств $\theta: A \rightarrow B$. p -метрика Васерштейна определяется из соотношения:

$$d_{W,p}(A, B) = \min_{\theta \in \Theta} \left\{ \left(\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} \Delta(I_\alpha, I_\beta)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}; \beta = \theta(\alpha), \quad (5)$$

где Θ – множество всех возможных диффеоморфных отображений $A \rightarrow B$. Если диффеоморфное отображение θ является заданным и множество Θ состоит из одного отображе-

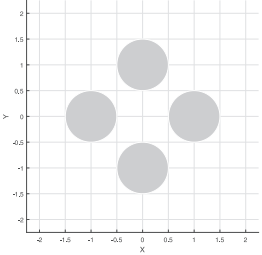
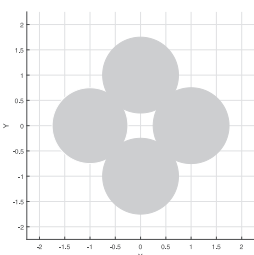
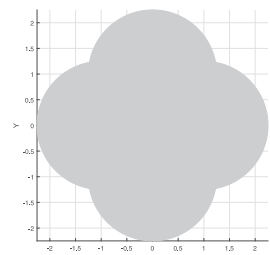
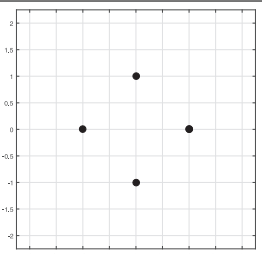
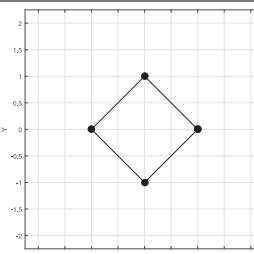
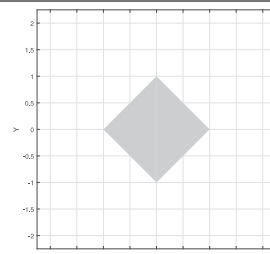
ния, то при $p = 2$ соотношение (5) может быть записано в виде:

$$d_{W,2}(A, B) = \sqrt{\sum_{\alpha \in A} w_{\alpha} \cdot \Delta(I_{\alpha}, I_{\theta(\alpha)})^2},$$

где w_{α} – вес, соответствующий баркоду I_{α} .

В таблице 3 приведен пример построения комплекса Вьеториса–Рипса для четырех облаков точек с центрами в вершинах $q_1 = (0 \ 1), q_2 = (-1 \ 0), q_3 = (0 \ -1), q_4 = (1 \ 0)$ при $r = 1, 0$, $r = 1, 5$ и $r = 2, 5$ с указанием чисел Бетти и характеристик Эйлера.

Таблица 3

	$2r = 1,0$	$2r = 1,5$	$2r = 2,5$
Точечные облака			
Комплекс Вьеториса–Рипса			
Числа Бетти	$\beta_0 = 4; \beta_1 = 0$	$\beta_0 = 1; \beta_1 = 1$	$\beta_0 = 1; \beta_1 = 0$
Характеристика Эйлера	$\chi = 4$	$\chi = 0$	$\chi = 1$

Для полученного комплекса Вьеториса–Рипса можно получить следующие баркоды: в размерности 0: $3[0\dots1,414); [0\dots\infty)$; в размерности 1: $[1,414\dots2)$.

3.1 Пример 2

Рассмотрим изменение топологии по диффеоморфном преобразовании 16 точечных ориентиров, представляющих окружность, в 16 точек, представляющих лемнискату Бернулли с расстоянием между фокусами $2a = 14$ (см. таблицу 3). Комплекс Вьеториса–Рипса при $r = 2$ при диффеоморфных преобразованиях изменяет числа Бетти следующим образом: при $t = 0$: $\beta_0 = 16, \beta_1 = 0$; при $t = 0, 5$: $\beta_0 = 14, \beta_1 = 0$; при $t = 1, 0$: $\beta_0 = 15, \beta_1 = 0$. При $r = 5$ числа Бетти изменяются: при $t = 0$: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1$; при $t = 0, 5$: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1$; при $t = 1, 0$: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2$.

Длительность расчета баркодов не превышает 2 секунд на компьютере с процессором Intel Pentium с тактовой частотой 3,2 ГГц, то есть на два порядка меньше длительности расчета в примере 1.

Таблица 4

Наименование изображения	Кривая 1	Кривая 2	Кривая 3
Баркоды гомотопий H_0	4[0...3,82); 8[0...3,90); 3[0...4,00); [0...∞);	[0...0,8); [0...1); [0...2,7); 2[0...2,8); 3[0...3,1); 2[0...3,2); 2[0...3,3); [0...3,4); [0...3,5); [0...3,6); [0...∞)	4[0...2,76); 4[0...3,04); 4[0...3,31); 2[0...3,64); [0...∞)
Баркоды гомотопий H_1	[4,0...18,45)	[3,735...10,57)	2[3,64...6,60)
Расстояние $d_{W,2}$	0	7,88	13,56

Расстояние Вассерштейна $d_{W,2}$ при $p = 2$ определяется для диффеоморфного преобразования изображения по отношению к исходному по баркодам гомотопий при весах баркодов гомотопий $H_0 : w_{H_0} = 1$, гомотопий $H_1 : w_{H_1} = 5$.

Таблица 5

Наименование изображения	Кривая 1	Кривая 2	Кривая 3
Кривая 1	0	1187	943
Кривая 2	1187	0	279
Кривая 3	943	279	0

Из таблицы 5 и малой длительности расчета баркодов гомотопий следует возможность сравнения диффеоморфных отображений кривых методом построения персистентных баркодов гомотопий в реальном масштабе времени (например, оценивание карты местности по информации оптико-электронных приборов летательных аппаратов в процессе полета). □

4 Заключение

В работе рассмотрена задача сравнения начального и терминального изображений, которая решается на основе построения минимизируемого функционала, характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой траектории.

В случае анализа формы объекта используются геометрические, спектральные, топологические характеристики объекта. Геометрические характеристики объекта могут изменяться при диффеоморфных деформациях. Характеристики формы, определяемые топологическими методами, не зависят от координатного представления рассматриваемой формы и являются инвариантными при диффеоморфных преобразованиях.

В работе применяются алгоритмы построения множеств полуинтервалов вещественных баркодов персистентных гомотопий для сравнения диффеоморфных изображений объектов. Отличительной особенностью использования персистентных гомотопий по отношению к методам алгебраической топологии является получение большего количества информации о форме объекта. Важным направлением применения персистентных гомотопий является изучение инвариантов больших объемов данных. Отличительной особенностью использования персистентных гомотопий по отношению к методам сравнения изображений

ражений на основе диффеоморфных преобразований [12] является снижение длительности расчета расстояния между изображениями.

В перспективных исследованиях предполагается построить алгоритмы машинного обучения для распознавания изображений объектов, построенные на основе применения персистентных гомологий.

5 Приложение. Топологический анализ данных [5]

Топологические пространства могут быть аппроксимированы симплицеальными комплексами. Симплицеальным комплексом является конечный набор множеств $K = \{\sigma_i\}_i$, где каждое σ_i является подмножеством некоторого конечного множества вершин K^0 . Этот набор удовлетворяет следующему условию: если $\sigma_i \in K$ и τ – грань σ_i (т.е. если $\tau \subseteq \sigma_i$), то $\tau \in K$. Если σ_i имеет $k+1$ вершин $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$, где каждая пара вершин неэквивалентна, то σ_i называется k -симплексом. k -скелет симплицеального комплекса K является подкомплексом K , состоящим из симплексов размерности k и ниже. Геометрический k -симплекс можно рассматривать как выпуклую оболочку $k+1$ аффинно независимых точек в \mathbb{R}^d , и из-за этого называют точку называют 0-симплексом, ребро – 1-симплексом, треугольник – 2-симплексом, тетраэдр – 3-симплексом.

Рассмотрим построение симплицеальных комплексов из точечных облаков вложенных в \mathbb{R}^d . Пусть $S = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$; $v_i \in \mathbb{R}^d$ – заданное множество точек. Для сравнения изображений, представленных множеством точечных ориентиров, можно использовать построение простейших комплексов Чеха и Вьеториса–Рипса из точечных облаков ориентиров v_i , построенных вокруг этих ориентиров.

Для $r \geq 0$ определим комплекс Чеха $\text{Cech}(S, r)$ с множеством вершин S согласно следующему правилу: симплекс $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ принадлежит $\text{Cech}(S, r)$, если замкнутые евклидовы шары $B(v_j; 0, 5r)$, $j = 0, \dots, p$ имеют непустое общее пересечение.

Для $r \geq 0$ определим комплекс Вьеториса–Рипса $\text{Rips}(S, r)$ с множеством вершин S согласно следующему правилу: симплекс $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ принадлежит $\text{Rips}(S, r)$, если:

$$\|v_j - v_k\| \leq r; \forall j, k \in [0, \dots, p]. \quad (6)$$

Группа гомологий для фиксированного симплицеального комплекса дает топологическую характеристику, которая кодирует дыры разных размерностей. Группы гомологии строятся с использованием линейных преобразований, называемых граничными операторами. k -цепь конечного симплицеального комплекса K является конечной формальной суммой ориентированных k -симплексов в K , $\alpha = \sum_i a_i \sigma_i$. Группа всех k -цепей $C_k(K)$ является векторным пространством. Граничный оператор $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ – линейное преобразование, порожденное отображением любого k -симплекса в сумму его $k-1$ граней по модулю 2, а именно:

$$\partial_k(\{v_0, v_1, \dots, v_k\}) = \sum_{i=0}^k \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k\},$$

где \hat{v}_i означает, что v_i отсутствует. Группа k -го цикла, $Z_k(K)$, является ядром граничного оператора ∂_k с элементами, называемыми k -циклами: $\ker \partial_k = \{c \in C_k \mid \partial_k(c) = \emptyset\}$. k -я граничная группа $B_k(K)$ – образ граничного оператора ∂_{k+1} , а его элементы называются k -границами: $\text{im} \partial_{k+1} = \{d \in C_k \mid \exists c \in C_{k+1} : d = \partial_{k+1}(c)\}$. Так как $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$, то $B_k(K)$ является подгруппой в $Z_k(K)$. Таким образом, можно определить k -ю группу гомологий

$H_k(K)$ как факторгруппу $Z_k(K)/B_k(K)$. Два k -цикла называются гомологичными, если они отличаются границей или если они находятся в одном классе эквивалентности $H_k(K)$. k -е число Бетти комплекса K : $\beta_k = \text{rank} H_k(K)$, характеристика Эйлера: $\chi = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i$.

Рассмотрим конечный симплициальный комплекс K и f – вещественнозначную функцию на симплексах K , которая удовлетворяет соотношению: $f(\tau) \leq f(\sigma)$ для всех $\tau \leq \sigma$ симплексов в K . Для любого $x \in \mathbb{R}$ подпоследовательность K , связанная с x , определяется как $K(x) = \{\sigma \in K \mid f(\sigma) \leq x\}$. Из предположений о функции f , $K(x)$ всегда является симплициальным комплексом и $K(x) \subseteq K(y); \forall x \leq y$. Пусть $\{x_1 < x_2 < \dots < x_l\}$ – отсортированный диапазон f . Фильтрация K по f является упорядоченной последовательностью его подкомплексов: $\emptyset \subset K(x_1) \subset K(x_2) \subset \dots \subset K(x_l) \subset K$. Последовательность включений K индуцирует линейные преобразования на последовательности векторных пространств:

$$H_k(K(x_1)) \rightarrow H_k(K(x_2)) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(K(x_n)).$$

Персистентная гомология отслеживает точку появления b (birth) и точку исчезновения d (death) нетривиальных классов гомологии по мере прохождения фильтрации. Набор векторных пространств $\{V_i\}$ и линейных преобразований $f_i: V_i \rightarrow V_{i+1}$ называется модулем персистентности. Интервальный модуль $I_{[b,d]}$ является модулем персистентности, для которого $f_i = 1$, если $i \in [b, d) \in B$ и 0 – в противном случае, где B множество интервалов (баркодов) $[b, d)$. Интервальные модули можно разложить в форме: $\bigoplus_{[b,d) \in B} I_{[b,d)}$. Эти интервалы точно кодируются, когда классы гомологии появляются и исчезают в модуле персистентности.

Расстояние между двумя баркодами $I_1 = [b_1, d_1), I_2 = [b_2, d_2)$ можно определить из соотношения:

$$\Delta(I_1, I_2) = \max\{|b_2 - b_1|, |d_2 - d_1|\}. \quad (7)$$

Для двух конечных баркодов $B_1 = \{I_\alpha^1\}_{\alpha \in A}, B_2 = \{I_\beta^2\}_{\beta \in B}$ рассмотрим частичное отображение $\theta: A' \rightarrow B', A' \subseteq A, B' \subseteq B$. p -метрика Леонида Васерштейна определяется из соотношения:

$$d_{W,p}(A', B') = \min_{\theta \in \Theta} \left\{ \left(\sum_{\alpha \in A', \theta(\alpha) \in B'} \Delta(I_\alpha^1, I_{\theta(\alpha)}^2)^p \right)^{1/p} \right\}, \quad (8)$$

где Θ – множество всех возможных взаимно-однозначных отображений $A \rightarrow B$.

Литература

- [1] Adams, H. Tausz, A. 2011. JavaPlex Tutorial. Available at: http://www.math.colostate.edu/~adams/research/javaplex_tutorial.pdf (accessed August 05, 2018).
- [2] Beg, M., Miller, M., Trounev, A., Younes, L. Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms // Int. Journal of Computer Vision, 2005. Т. 61 №2. С. 139–157. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000043755.93987.aa>.
- [3] Carlsson, G. Topological pattern recognition for point cloud data // Acta Numerica, 2014. №23. С. 259–368. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1017/S0962492914000051P>.
- [4] Chukanov, S. N. Definitions of invariants for n -dimensional traced vector fields of dynamic systems // Pattern Recognition and Image Analysis, 2009. Т. 19. №2. С. 303–305. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1134/S105466180902014X>.
- [5] Edelsbrunner H., Harer J. L. Computational Topology. — American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. 282 с.

- [6] *Glaunés J., Qiu A., Miller M., Younes L.* Large deformation diffeomorphic metric curve mapping // International journal of computer vision, 2008. Т. 80. №3. С. 317–336. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1007/s11263--008--0141--9>.
- [7] *Hatcher, A.* Algebraic topology. — Cambridge UP, 2002. 544 с.
- [8] *Marsland, S., McLachlan, R.I.* Hamiltonian particle method for diffeomorphic image registration // In: Karssemeijer N, Lelieveldt B, editors. Proceedings of Information Processing in Medical Images. Lect Notes Comput Sci.. — New York: Springer, 2006. С. 396–407. doi: http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1007/978--3--540--73273--0_33.
- [9] *Tierny, J.* 2017. Introduction to topological data analysis. Available at: <https://hal.archives-ouvertes.fr/ce1--01581941/file/manuscript.pdf> (accessed August 05, 2018).
- [10] *Trounev, A., Younes, L.* Metamorphoses through lie group action // Foundations of Computational Mathematics, 2005. Т. 5. №2. С. 173–198. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1007/s10208--004--0128--z>.
- [11] *Younes, L., Arrate, F., Miller, M.I.* Evolutions equations in computational anatomy // NeuroImage, 2009. Т. 45. №1. С. 40–50. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2008.10.050>
- [12] *Лейхтер С. В., Чуканов С. Н.* Сравнение изображений на основе их диффеоморфного преобразования // Компьютерная оптика, 2018. Т. 42. №1. С. 96–104. doi: <http://dx.doi.org/10.18287/2412--6179--2018--42--1--96--104>.
- [13] *Чуканов С. Н., Ульянов Д. В.* Формирование инвариантов при визуализации векторных полей на основе построения оператора гомотопии // Компьютерная оптика, 2012. Т. 36. №4. С. 622–626.

Поступила в редакцию 22.09.2018

The matching of diffeomorphic images based on topological data analysis*

S. N. Chukanov¹, S. V. Leykhter²

ch_sn@mail.ru; leykhter@mail.ru

¹Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of RAS, Omsk branch, str. Pevtsova, 13, Omsk, Russia;

²State Automobile and Highway University, Mira avenue, 5, Omsk, Russia

The problem of matching of a initial and terminal images, which is solved on the basis of the construction of a minimized functional characterizing the evolution of the diffeomorphic transformation of the image from a initial to terminal image, and the penalty for deviating the image path from the required trajectory, is considered in this paper. The form of the object is analyzed when recognizing object images using persistent homology methods. The shape characteristics determined by topological methods do not depend on the coordinate representation of the form under consideration and are invariant under diffeomorphic transformations. A distinctive feature of using persistent homologies with respect to methods of algebraic topology is obtaining more information about the form of the object.

Keywords: *pattern recognition, diffeomorphic transformations, persistent homologies*

DOI: 10.21469/22233792.4.2.03

*The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants 18–07–00526 and 18–08–01284).

References

- [1] Adams, H. Tausz, A. 2011. JavaPlex Tutorial. Available at: http://www.math.colostate.edu/~adams/research/javaplex_tutorial.pdf (accessed August 05, 2018).
- [2] Beg, M., Miller, M., Trouvé, A., Younes, L. 2005 Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms // *Int. Journal of Computer Vision*, 61(2):139–157. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000043755.93987.aa>.
- [3] Carlsson, G. 2014 Topological pattern recognition for point cloud data // *Acta Numerica*, 23:259–368. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1017/S0962492914000051P>.
- [4] Chukanov, S.N. 2009 Definitions of invariants for n -dimensional traced vector fields of dynamic systems // *Pattern Recognition and Image Analysis*, 19(2):303–305. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1134/S105466180902014X>.
- [5] Edelsbrunner H., Harer J.L. 2010 *Computational Topology*. — American Mathematical Society, Providence, RI. 282 p.
- [6] Glaunés J., Qiu A., Miller M., Younes L. 2008 Large deformation diffeomorphic metric curve mapping // *International journal of computer vision*, 80(3):317–336. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1007/s11263--008--0141--9>.
- [7] Hatcher, A. 2002 *Algebraic topology*. — Cambridge UP. 544 p.
- [8] Marsland, S., McLachlan, R.I. 2006 Hamiltonian particle method for diffeomorphic image registration // In: Karssemeijer N, Lelieveldt B, editors. *Proceedings of Information Processing in Medical Images. Lect Notes Comput Sci.* — New York: Springer. p.396–407. doi: http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1007/978--3--540--73273--0_33.
- [9] Tierny, J. 2017. Introduction to topological data analysis. Available at: <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel--01581941/file/manuscript.pdf> (accessed August 05, 2018).
- [10] Trouvé, A., Younes, L. 2005 Metamorphoses through lie group action // *Foundations of Computational Mathematics*, 5(2):173–198. doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1007/s10208--004--0128--z>.
- [11] Younes, L., Arrate, F., Miller, M.I. 2009 Evolutions equations in computational anatomy // *NeuroImage*, 45(1):40–50. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2008.10.050>
- [12] Lejhter S.V., Chukanov S.N. 2018 Matching of images based on their diffeomorphic mapping // *Computer optics*, 42(1):96–104. doi: <http://dx.doi.org//10.18287/2412--6179--2018--42--1--96--104>.
- [13] Chukanov S.N., Ulyanov D.V. 2018 The formation of invariants for visualization of vector fields on the basis of constructing homotopy operator // *Computer optics*, 36(4):622–626.

Received September 22, 2018