

Об идентификации статистической модели транспортных потоков с использованием групп автомобильно-транспортных средств

В. М. Старожилец^{1,2}, *Ю. В. Чехович*^{1,2}
starvsevol@gmail.com; chehovich@forecsys.ru

¹ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 44/2

²Московский физико-технический институт, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Предлагается статистическая модель транспортных потоков для моделирования движения транспортных средств на автомагистралях, идентифицируемая на данных из гетерогенных источников. Модель симулирует движение групп транспортных средств по магистрали с использованием фундаментальной диаграммы на выбранном участке автодороги для расчета скорости группы. Проводятся вычислительные эксперименты для подтверждения работоспособности модели, а также анализа ее поведения при моделировании ситуации перекрытия одной из полос автомагистрали. Критерием качества выбрана среднеквадратичная ошибка между предсказанным числом проехавших автотранспортных средств и их реальным числом. Используются данные дорожных датчиков Центра организации дорожного движения, а также данные, полученные с помощью видеосъемки.

Ключевые слова: *моделирование транспортных потоков; МКАД; дорожные датчики*

DOI: 10.21469/22233792.3.3.02

1 Введение

Данная работа посвящена описанию модели, предназначенной для моделирования транспортных потоков на автомагистрали (например, Московской кольцевой автомобильной дороге (МКАД)) с использованием анонимных данных с GPS-треков и дорожных датчиков. Процедура комплексирования данных из этих двух источников подробно рассмотрена в [1]. Также в данной работе проводятся эксперименты как на данных с дорожных датчиков, так и полученных видеосъемкой, показывающих работоспособность представленной модели.

Моделирование транспортных потоков основано на их сходстве с жидкой или газовой средой. В частности, базовая модель Лайтхилла–Уизема–Ричардса (Lighthill–Whitham–Richards, LWR) [2–4] основана на предположении о существовании взаимно-однозначной зависимости между скоростью и плотностью потока автомобильно-транспортных средств (АТС) и сохранении числа АТС в транспортной сети. В современном макроскопическом подходе транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в различных постановках [5–12]. В данной работе будет, однако, рассмотрена модель, которая не пытается поставить в соответствие потоку АТС поток жидкости или газа, а использует общие знания о характеристиках участка автомагистрали (фундаментальную диаграмму [13] на ней), а также усредненные физические размеры автомобилей для моделирования состояния магистрали в каждый момент времени.

История развития задач моделирования транспортной сети, а также существующие модели широко рассмотрены в [14]. В [15] приводится общая схема моделирования, схожая с предлагаемой, и проводится моделирование большого участка автомагистрали, что

совпадает с нашей конечной целью. Основное отличие данной модели от уже представленных — это то, что рассматривается движение неразделимых групп автомобилей по магистрали (которые, однако, могут соединяться между собой) вместо движения самих автомобилей, считая скорость транспортных средств в группе одинаковой. Хотя данное приближение довольно грубое, будет показано, что его достаточно для получения результатов, хорошо совпадающих с реальными измерениями, при любых режимах автомагистрали [16], а также моделирования перекрытия полос на магистрали.

2 Описание модели

2.1 Структура модели

В данном разделе определим топологию, моделирующую структуру автомагистрали в предлагаемой модели. Будем считать, что только вершины графа являются стоками и источниками АТС и никаких дополнительных стоков и источников не бывает. Временной интервал одного шага симуляции в этой работе обозначен как τ .

Пусть $\mathbf{G} = \{\mathbf{V}, \mathbf{E}\}$ — связный ориентированный граф, представляющий собой модель автомагистрали, где \mathbf{V} — множество ребер; \mathbf{E} — множество упорядоченных пар вершин. Пусть также $\tilde{\mathbf{G}} = \{\mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathbf{Ex}, \mathbf{In}, \mathbf{Tr}, \mathbf{M}, \mathbf{N}_{\text{exit}}\}$ — свойства участков автомагистрали, соответствующих данным ребрам и вершинам, где $L_{i,k} \in \mathbf{L}$ — длина участка автомагистрали, соответствующего ребру (i, k) в метрах; $n_{i,k} \in \mathbf{N}$ — число полос, по которым разрешено движение АТС в ребре (i, k) , $\text{Ex}_i \in \mathbf{Ex}$ — максимальное число АТС, которое может съехать с дороги при достижении данной вершины i за время τ ; $\text{In}_{i,k} \in \mathbf{In}_i \in \mathbf{In}$ — число АТС, которые должны въехать на автомагистраль с вершины i за время τ в момент времени k ; $\text{Tr}_i \in \mathbf{Tr}$ — максимальное число АТС, которые могут переехать с ребра (m, i) на ребро (i, l) ; $M_{i,k} \in \mathbf{M}_i \in \mathbf{M}$ — доля АТС, которая съезжает с автомагистрали при достижении вершины i в момент времени k ; $N_{\text{exit},i} \in \mathbf{N}_{\text{exit}}$ — количество АТС, которые стоят в очереди на съезд с автомагистрали в узле i . При этом $\delta(\mathbf{G}) = 1$ и $\Delta(\mathbf{G}) = 2$ — минимальная и максимальная степень вершины в графе соответственно. В данной работе не проводится моделирование всей автомагистрали, а только небольших ее участков, поэтому $|\mathbf{V}| = 2$.

Как уже упоминалось выше, в данной статье не рассматривается движение каждого отдельного автомобиля, а только движение групп автомобилей $\mathbf{A}_l \in \bar{\mathbf{A}}_{i,j}$, где $\bar{\mathbf{A}}_{i,j}$ — множество всех автомобильных групп в ребре (i, j) , упорядоченное по убыванию расстояния до начала ребра, $l \in \mathbb{N}_+$. Множество \mathbf{A}_l представимо в виде $\{\text{Pos}_l, V_l, N_l\}$, где $\text{Pos}_l \in [0, L_{i,j}]$ — положение группы АТС в ребре (i, j) , $V_l \in \mathbb{Q}_+$ — скорость группы АТС, $N_l \in \mathbb{Q}_+$ — число АТС в группе. Заметим, что на данный момент нигде не предполагается, что число АТС в группе съезжающих либо въезжающих АТС должно быть целым числом.

2.2 Процедура расчета

Теперь, когда структура модели определена, опишем процедуру расчета движения АТС в данной модели. Окончательная цель предлагаемого алгоритма — это по имеющимся данным о числе въехавших на автомагистраль АТС получить число проезжающих по любому участку магистрали АТС в любой момент времени. Начнем с методики расчета скорости движения группы АТС. С помощью фундаментальной диаграммы для каждого ребра (i, j) определяется функция $V = f_{i,j}(\rho)$, $f_{i,j} : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$, где $\rho \in \mathbb{R}_+$ — плотность АТС.

Процедура построения этой функции детально описана в работах [1, 13]. Также важным фактором является то, что скорость для конкретной группы АТС рассчитывается исходя из плотности АТС на участке автомагистрали перед ним либо же по плотности АТС на следующем участке автомагистрали, если группа достигла конца своего участка. Таким образом, для каждого $\mathbf{A}_l \in \bar{\mathbf{A}}_{i,j}$ скорость определяется следующим образом:

$$V_l = f_{i,j}(\rho_l), \quad (1)$$

где $\rho_l \in \mathbb{Q}_+$ — плотность АТС на участке автомагистрали перед группой АТС \mathbf{A}_l :

$$\rho_l = \begin{cases} \frac{N_{\text{exit},j} + \sum_{m=l+1}^{|\bar{\mathbf{A}}_{i,j}|} N_m}{(L_{i,j} - \text{Pos}_l) N_{i,j}}, N_m \in \mathbf{A}_m \in \bar{\mathbf{A}}_{i,j}, \text{Pos}_l < L_{i,j}; \\ \frac{N_{\text{exit},k} + \sum_{m=1}^{|\bar{\mathbf{A}}_{j,k}|} N_m}{L_{j,k} N_{j,k}}, N_m \in \mathbf{A}_m \in \bar{\mathbf{A}}_{j,k}, \text{Pos}_l = L_{i,j}. \end{cases}$$

Теперь опишем саму процедуру моделирования. Расчет начинается либо в вершине j : $\forall i \in \mathbf{V} \exists (j, i)$, либо в любой вершине графа, идет в направлении против ориентации ребер. Положим, что $L_{\text{avg}} \in \mathbb{Q}_+$ — средняя длина автомобилей в метрах; $N_{\text{max},(j,m)} = L(j, m) n_{(j,m)} / L_{\text{avg}}$ — максимальное число АТС на ребре (j, m) ; $b_{l,i,j} \in \{0, 1\}$ — маркер того, съезжали ли из группы АТС l на ребре (i, j) автомобили с автомагистрали; $\widetilde{\text{Tr}}_{i,k}$ — число АТС, проезжающих с ребра m, i на ребро i, j за временной интервал $[\tau(k-1), \tau k]$. Вид алгоритма 1 представлен ниже.

3 Вычислительный эксперимент

Проводятся три эксперимента на данных о въехавших и съехавших с участка автомагистрали АТС, полученных ручной съемкой. Съемка велась на пересечении Варшавского шоссе с Новоданиловским и Нагорными проездами, длина участка автомагистрали — 1250 м, а также с помощью дорожных датчиков на МКАД между 99 и 101 км. Тут проводилось два эксперимента — моделирование числа съехавших АТС по числу въехавших и моделирование перекрытия одной полосы на съезде с участка автомагистрали.

Данные с дорожных датчиков и полученные ручной съемкой представляют собой последовательность проехавших по участку автотрассы АТС за каждый фиксированный интервал времени. Более детально данные с дорожных датчиков и их недостатки описаны в работе [1].

Все графики в данном разделе имеют вид $n(k)$, где n — число проехавших автомобилей за временной интервал τ с порядковым номером k , т. е. время от начала моделирования имеет вид τk . Как критерий качества выбрана величина среднеквадратичной ошибки предсказанной величины n :

$$S = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (n(k) - \bar{n}(k))^2},$$

где K — число временных интервалов; \bar{n} — зафиксированное ручной съемкой либо дорожными датчиками число проехавших по участку магистрали АТС. Временной интервал τ в данной работе равен 2 мин.

Алгоритм 1 Алгоритм моделирования автомагистрали

Вход: $\mathbf{In} \in \tilde{\mathbf{G}}$; T — время конца моделирования; j' — вершина начала моделирования;

$\mathbf{V}' = \mathbf{V}$ — множество непросмотренных вершин; $k = -1$.

Выход: $\forall k \tau \forall (i, j) \in \mathbf{E}$ множества $\bar{\mathbf{A}}_{i,j}$

пока $\tau k < T$

$\mathbf{V}' = \mathbf{V}$; $j = j'$; $k = k + 1$

пока $|\mathbf{V}'| \neq 0$

Создаем новую группу АТС $\mathbf{A}_l \in \bar{\mathbf{A}}_{i,j}$, $l = |\bar{\mathbf{A}}_{i,j}| + 1$, $V_l = 0$, $\text{Pos}_l = 0$

если $\text{Tr}'_{i,k} + \text{In}_{i,k} + \sum_{s=1}^{|\bar{\mathbf{A}}_{i,j}|} N_s < N_{\max,(i,j)}$, **то**

$N_l = \text{Tr}'_{i,k} + \text{In}_{i,k}$

иначе

$N_l = N_{\max,(i,j)} - \sum_{s=1}^{|\bar{\mathbf{A}}_{i,j}|} N_s$;

$\text{In}_{i,k+1} = \text{In}_{i,k+1} + (\text{Tr}'_{i,k} + \text{In}_{i,k} + \sum_{s=1}^{|\bar{\mathbf{A}}_{i,j}|} N_s - N_{\max,(i,j)})$

для всех $\mathbf{A}_l \in \bar{\mathbf{A}}_{i,j}$, $l \in [1, |\bar{\mathbf{A}}_{i,j}|]$

$N_{\text{tmp}} = 0$; $V_l = f_{i,j}(\rho_l)$ (1).

Рассчитываем новое положение группы АТС как

если $\exists \text{Pos}_{l+1}$, **то**

$$\text{Pos}_l = \begin{cases} \text{Pos}_l + V_l \tau, & \text{Pos}_l + V_l \tau < \text{Pos}_{l+1} - ((N_l + N_{l+1})/2)L_{\text{avg}}; \\ \text{Pos}_{l+1} - ((N_l + N_{l+1})/2)L_{\text{avg}}, & \text{Pos}_l + V_l \tau \geq \text{Pos}_{l+1} - ((N_l + N_{l+1})/2)L_{\text{avg}}, \end{cases}$$

иначе

$$\text{Pos}_l = \begin{cases} \text{Pos}_l + V_l \tau, & \text{Pos}_l + V_l \tau < L_{i,j}; \\ L_{i,j}, & \text{Pos}_l + V_l \tau \geq L_{i,j} \end{cases}$$

если $\text{Pos}_l = L_{i,j}$ и $l = |\bar{\mathbf{A}}_{i,j}|$, **то**

если $b_{l,i,j} = 0$, **то**

$N_{\text{exit},j} = N_{\text{exit},j} + M_{j,k} N_l$; $N_l = (1 - M_{j,k}) N_l$; $b_{l,i,j} = 1$

если $N_{\text{exit},m} + \sum_{s=1}^{|\bar{\mathbf{A}}_{j,m}|} N_s + N_{\text{tmp}} < N_{\max,(j,m)}$, **то**

$N_{\text{proc}} = N_l$

иначе

$N_{\text{proc}} = N_{\max,(j,m)} - (N_{\text{exit},m} + \sum_{s=1}^{|\bar{\mathbf{A}}_{j,m}|} N_s + N_{\text{tmp}})$

если $N_{\text{proc}} > \text{Tr}_j$, **то**

$N_{\text{proc}} = \text{Tr}_j$

$N_{\text{tmp}} = N_{\text{tmp}} + N_{\text{proc}}$; $\text{Tr}'_{j,k+1} = \text{Tr}'_{j,k+1} + N_{\text{proc}}$; $N_l = N_l - N_{\text{proc}}$

если $N_l = 0$, **то**

Удаляем группу АТС \mathbf{A}_l

если $\text{Pos}_{l+1} - \text{Pos}_l \leq ((N_l + N_{l+1})/2)L_{\text{avg}}$ и $N_l + N_{l+1} \leq \varepsilon_n$, **то**

если $\text{Pos}_{l+1} = L_{i,j}$ и $l + 1 = |\bar{\mathbf{A}}_{i,j}|$, **то**

$N_{\text{exit},j} = N_{\text{exit},j} + M_{j,k} N_l$; $N_l = (1 - M_{j,k}) N_l$; $b_{l,i,j} = 1$

$N_l = N_l + N_{l+1}$; $V_l = V_{l+1}$; $\text{Pos}_l = \text{Pos}_{l+1}$

Удаляем группу АТС \mathbf{A}_{l+1}

$\mathbf{V}' = \mathbf{V}' \setminus j$, $i = j$

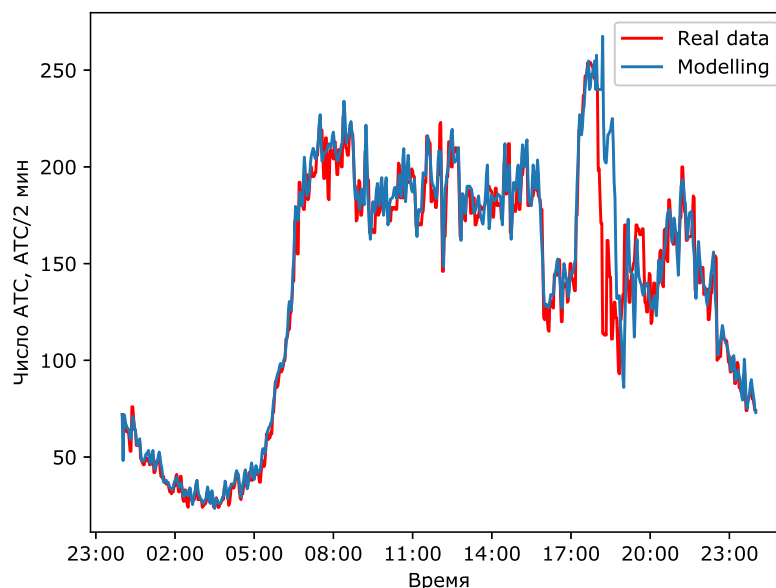


Рис. 1 График полученного с помощью модели числа съехавших АТС (красная линия) в сравнении с числом съехавших АТС, зафиксированных дорожным датчиком (синяя линия), за один день. Среднеквадратичная ошибка $S = 18,4$

3.1 Эксперимент с данными дорожных датчиков

В эксперименте использовали построенную для данного участка автомагистрали фундаментальную диаграмму [13]. В приведенной статье диаграмма строилась на тех же данных, которыми авторы оперируют в этой. Полный временной интервал эксперимента — одна неделя, графики приведены за один день. В первом эксперименте проводится проверка результатов модели в простейшем случае моделирования числа съехавших АТС по числу въехавших на участке автомагистрали без въездов и съездов. Результаты показаны на рис. 1. Среднеквадратичная ошибка $S = 18,4$.

3.2 Эксперимент с перекрытием полосы

Во втором эксперименте проводится моделирование ситуации, когда одна из полос на автомагистрали перекрывается. Сам эксперимент проводится на том же участке автомагистрали и за тот же промежуток времени, что и первый в подразд. 3.1. Данных для расчета среднеквадратичной ошибки у авторов нет, и этот эксперимент был поставлен, чтобы проанализировать поведение модели в такой ситуации. Результаты за тот же день, что и в первом эксперименте, можно увидеть на рис. 2.

Видно, что АТС не могут съехать из-за ограничения на максимальное число проезжающих с одного ребра на другое автомобилей, что приводит к появлению горизонтальной линии на графике. Однако через некоторое время после того, как поток должен был спастись, что видно на графике реальных данных за тот же временной промежуток, дорога освобождается и результат моделирования приходит в соответствие с реальными данными.

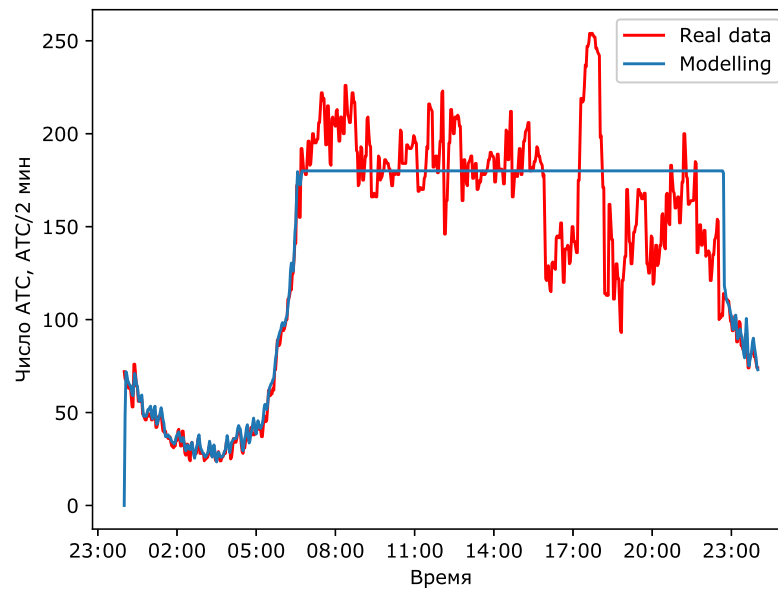


Рис. 2 График полученного с помощью модели числа съехавших АТС (красная линия) в сравнении с числом съехавших АТС зафиксированных дорожным датчиком (синяя линия), за один день. Одна полоса перекрыта

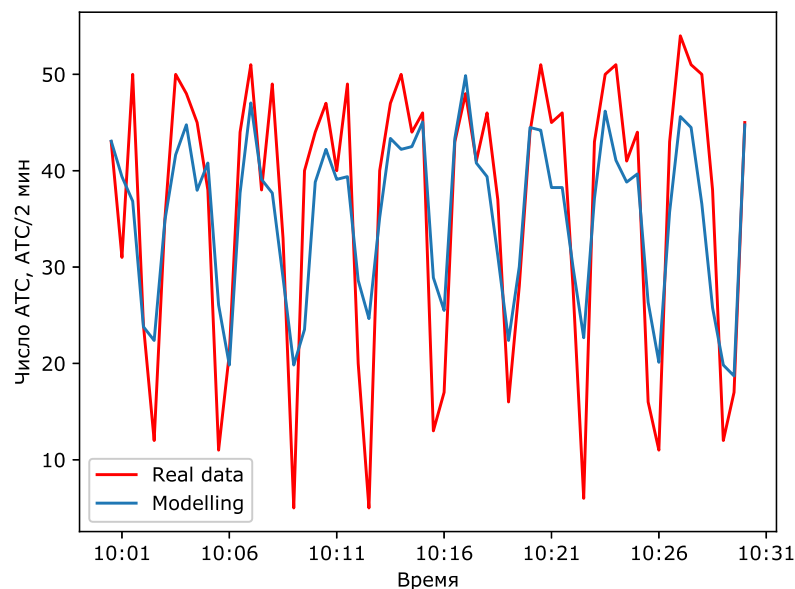


Рис. 3 График полученного с помощью модели числа съехавших АТС (красная линия) в сравнении с числом съехавших АТС зафиксированных видеосъемкой (синяя линия) за 30 мин. Среднеквадратичная ошибка $S = 8,08$

3.3 Эксперимент с данными видеосъемки

В данном эксперименте на въезде и съезде с выбранного участка автомагистрали стоят светофоры, что учитывается при анализе результатов эксперимента. Временной интервал

эксперимента — 30 мин. Из-за небольших объемов имеющихся данных авторы не имели возможности построить фундаментальную диаграмму для данного участка автомагистрали и воспользовались диаграммой для МКАД из первого эксперимента. Полученный результат приведен на рис. 3. В данном эксперименте из-за светофора на съезде число съехавших АТС за некоторые временные интервалы практически равен нулю. В то же время из-за светофора на въезде модель показывает, что даже не будь светофора, на въезде число автомобилей, подъезжающее к съезду в данные моменты времени, также невелико. Оказывается, что светофоры синхронизированы. Среднеквадратичная ошибка $S = 8,08$.

4 Обсуждение результатов

В работе изложен новый алгоритм моделирования числа проехавших АТС для задачи моделирования транспортных потоков с использованием данных из разнородных источников [1] и проведены три эксперимента, показывающих его состоятельность.

Эксперимент из подразд. 3.1 показывает работоспособность модели для моделирования прямого участка автомагистрали. На рис. 1 видно, что модель адекватно симулирует дорожную ситуацию при любом числе проезжающих АТС.

В эксперименте в подразд. 3.2 исследуется реакция модели на перекрытие одной из полос автомагистрали. То, что после спада потока АТС прогноз модели снова стал совпадать с реальными данными, показывает ее состоятельность в данной ситуации.

Эксперимент на данных видеосъемки из подразд. 3.3 не такой наглядный, как из подразд. 3.1, из-за светофора на съезде, наличие которого нельзя учесть в предлагаемой модели. Однако даже на нем модель ведет себя адекватно, во многом из-за того что светофоры на въезде понижают поток АТС так, что во время перекрытия съезда поток подъезжающих к нему АТС минимален.

5 Благодарности

Авторы благодарят ООО «Яндекс» за предоставленные анонимные трековые данные, Центр организации дорожного движения за данные датчиков движения. Авторы также чрезвычайно признательны Я. А. Холодову и А. Е. Алексеенко за консультации и обсуждение результатов.

Литература

- [1] *Старожилец В. М., Чехович Ю. В.* Комплексование данных из разнородных источников в задачах моделирования транспортных потоков // *Машинное обучение и анализ данных*, 2016. Т. 2. № 3. С. 260–276.
- [2] *Lighthill M.J., Whitham G.B.* On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads // *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.*, 1955. Vol. 229. P. 317–345. doi: 10.1098/rspa.1955.0089.
- [3] *Richards P.I.*, Shock waves on the highway // *Oper. Res.*, 1956. Vol. 4. No. 1. P. 42–51. doi: 10.1287/opre.4.1.42.
- [4] *Whitham J.B.* Linear and nonlinear waves. — Wiley, 1974. 656 p.

- [5] *Daganzo C. F.* Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow // *Transport. Res. B Meth.*, 1995. Vol. 29. No. 4. P. 277–286. doi: 10.1016/0191-2615(95)00007-Z.
- [6] *Payne H. J.* Models of freeway traffic and control // *Math. Models Public Syst.*, 1998. No. 4. P. 51–61.
- [7] *Papageorgiou M.* Some remarks on macroscopic traffic flow modelling // *Transport. Res. A Pol.*, 1998. Vol. 32. No. 5. P. 323–329. doi: 10.1016/S0965-8564(97)00048-7.
- [8] *Aw A., Michel Rasche M.* Resurrection of “second order” models of traffic flow // *SIAM J. Appl. Math.*, 2000. Vol. 60. No. 3. P. 916–938. doi: 10.1137/S0036139997332099.
- [9] *Zhang M.* A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // *Transport. Res. B Meth.*, 2002. Vol. 36. No. 3. P. 275–290. doi: 10.1016/S0191-2615(00)00050-3.
- [10] *Zhang M.* Anisotropic property revisited — does it hold in multi-lane traffic? // *Transport. Res. B Meth.*, 2003. Vol. 37. No. 6. P. 561–577. doi: 10.1016/S0191-2615(02)00030-9.
- [11] *Siebel F., Mauser W.* On the fundamental diagram of traffic flow // *SIAM J. Appl. Math.*, 2006. Vol. 66. No. 4. P. 1150–1162. doi: 10.1137/050627113.
- [12] *Siebel F., Mauser W.* Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic // *Phys. Rev. E*, 2006. Vol. 73. No. 6. P. 066108. doi: 10.1103/PhysRevE.73.066108.
- [13] *Алексеевко А.Е., Холодов Я.А., Холодов А.С., Горева А.И., Васильев М.О., Чехович Ю.В., Мишин В.Д., Старожилец В.М.* Разработка, калибровка и верификация модели движения трафика в городских условиях. Ч. I // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2015. Т. 7. №6. С. 1185–1203.
- [14] *Wageningen-Kessels V., Hoogendoorn S. P., Vuk C., et al.* Traffic flow modeling: A genealogy. — TRB, 2014. 156 p.
- [15] *Kotsialos A., Papageorgiou M., Diakaki C., Pavlis Y., Middelham F.* Traffic flow modeling of large-scale motorway networks using the macroscopic modeling tool METANET // *IEEE T. Intell. Transp.*, 2002. Vol. 3. No. 4. P. 282–292. doi: 10.1109/TITS.2002.806804.
- [16] *Kerner B.* The physics of traffic. — Berlin: Springer, 2004. 681 p. doi: 10.1007/978-3-540-40986-1.

Поступила в редакцию 17.09.2017

About identification of a statistical model of traffic flows using vehicle groups

V. M. Starozhilets^{1,2} and Yu. V. Chehovich^{1,2}

starvsevol@gmail.com; chehovich@forecsys.ru

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS, 44/2 Vavilova Str., Moscow, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow, Russia

A statistical model of traffic flows for modeling speed and number of cars on highways identified on data from heterogeneous sources is proposed. The model simulates movement of car groups along the highway using corresponding to the selected road segment fundamental diagram to calculate the car groups speed. Computational experiments are provided to confirm the

adequateness of the model. Also, its behavior in situation of blocking one of the lanes of the highway is analyzed. The criterion of quality is the root-mean-square error between the predicted number of passed vehicles and the actual number of vehicles. Data from traffic detectors, provided by Traffic Management Center, and data obtained by video recording are used in this study.

Keywords: *transport flow modelling; Moscow Ring Road; traffic detectors*

DOI: 10.21469/22233792.3.3.02

References

- [1] Starozhilets, V. M., and Yu. V. Chekhovich. 2016. Kompleksirovanie dannykh iz raznorodnykh istochnikov v zadachakh modelirovaniya transportnykh potokov [Aggregation of data from different sources in traffic flow tasks]. *Machine Learning Data Anal.* 2(3):260–276.
- [2] Lighthill, M. J., and G. B. Whitham. 1955. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads // *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.* 229:281–345. doi: 10.1098/rspa.1955.0089.
- [3] Richards, P. I. 1956. Shock waves on the highway. *Oper. Res.* 4(1):42–51. doi: 10.1287/opre.4.1.42.
- [4] Whitham, J. B. 1974. *Linear and nonlinear waves*. Wiley. 656 p.
- [5] Daganzo, C. F. 1955. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow. *Transport. Res. B Meth.* 29(4):277–286. doi: 10.1016/0191-2615(95)00007-Z.
- [6] Payne, H. J. 1998. Models of freeway traffic and control. *Math. Models Public Syst.* 4:51–61.
- [7] Papageorgiou, M. 1988. Some remarks on macroscopic traffic flow modelling. *Transport. Res. A Pol.* 32(5):323–329. doi: 10.1016/S0965-8564(97)00048-7.
- [8] Aw, A., and M. Michel Rasclé. 2000. Resurrection of “second order” models of traffic flow. *SIAM J. Appl. Math.* 60(3):916–938. doi: 10.1137/S0036139997332099.
- [9] Zhang, M. 2002. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transport. Res. B Meth.* 36(3):275–290. doi: 10.1016/S0191-2615(00)00050-3.
- [10] Zhang, M. 2003. Anisotropic property revisited — does it hold in multi-lane traffic? *Transport. Res. B Meth.* 37(6):561–577. doi: 10.1016/S0191-2615(02)00030-9.
- [11] Siebel, F., and W. Mauser. 2006. On the fundamental diagram of traffic flow. *SIAM J. Appl. Math.* 66(4):1150–1162. doi: 10.1137/050627113.
- [12] Siebel, F., and W. Mauser. 2006. Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic. *Phys. Rev. E* 73(6):066108. doi: 10.1103/PhysRevE.73.066108.
- [13] Alekseenko, A. E., Yu. A. Kholodov, A. S. Kholodov, A. I. Goreva, M. O. Vasil’ev, Yu. V. Chekhovich, V. D. Mishin, and V. M. Starozhilets. 2015. Razrabotka, kalibrovka i verifikatsiya modeli dvizheniya trafika v gorodskikh usloviyakh. Ch. I [Development, calibration, and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part I]. *Komp’yuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modeling] 7(6):1185–1203.
- [14] Wageningen-Kessels, V., S. P. Hoogendoorn, C. Vuik, *et al.* *Traffic flow modeling: A genealogy*. TRB, 2014. 156 p.

- [15] Kotsialos, A., M. Papageorgiou, C. Diakaki, Y. Pavlis, and F. Middelham. 2002. Traffic flow modeling of large-scale motorway networks using the macroscopic modeling tool METANET. *IEEE T. Intell. Transp.* 3(4):282–292. doi: 10.1109/TITS.2002.806804.
- [16] Kerner, B. 2004. *The physics of traffic*. Berlin: Springer. 681 p. doi: 10.1007/978-3-540-40986-1.

Received September 17, 2017