

# Оценивание значимости переменных в моделях ранговой регрессии

*В. М. Неделько*

nedelko@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Россия, г. Новосибирск, пр. акад. Коптюга, 4

Для регрессионного анализа предложены варианты обобщения понятия ROC (relative operating characteristics) кривой, которые позволяют визуализировать, в какой степени построенное решение использует прогнозирующую способность переменных, а также позволяют оценить информативность переменных. В отличие от известных кривых RROC (regression ROC) и REC (regression error characteristics) предложенные варианты более точно воспроизводят поведение ROC-кривой для классификации, в частности для случайного прогноза эти кривые приближаются к прямой. Предложенная конструкция ROC-кривой близка к конструкции эмпирического моста.

**Ключевые слова:** ROC-кривая; регрессия; отбор признаков; RROC-кривая; эмпирический мост

DOI: 10.21469/22233792.3.2.05

## 1 Введение

Существует большое число подходов к оцениванию значимости переменных в задачах построения решающих функций [1], которые применимы к задаче регрессионного анализа. Одним из таких подходов является анализ (в том числе визуальный) ROC-кривой [2].

Изначально понятие ROC-кривой (кривой ошибок) было введено для задачи классификации (распознавания образов), где оно является одним из основных инструментов для анализа качества решающей функции [3, 4]. В этом случае ROC-кривая — это по сути эмпирическая функция распределения второго класса, построенная как функция от значений эмпирической функции распределения первого класса для переменной, упорядочивающей объекты по оцененной вероятности их принадлежности первому классу [5]. Площадь под ROC-кривой пропорциональна  $U$ -статистике критерия Манна–Уитни [6], а именно:

$$AUC = \frac{U}{N_1 N_2},$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — объемы выборок для первого и второго классов.

Известны обобщения понятия ROC-кривой для регрессионного анализа (REC-кривая [7] и RROC-кривая [8]). Однако эти обобщения требуют явного задания прогнозируемых значений целевой переменной, в то время как для построения ROC-кривой в задаче классификации достаточно лишь упорядочивания объектов.

В работе предлагается вариант ROC-кривой для задачи регрессионного анализа, который использует порядок прогнозируемых значений целевой переменной, но не сами значения.

## 2 Постановка задачи

Пусть  $X$  — пространство значений переменных, используемых для прогноза, а  $Y$  — пространство значений прогнозируемых переменных, и пусть  $\mathcal{C}$  — множество всех вероятностных мер на заданной  $\sigma$ -алгебре подмножеств множества  $D = X \times Y$ . При каждом  $c \in \mathcal{C}$

имеем вероятностное пространство  $\langle D, \mathfrak{B}, P_c \rangle$ , где  $\mathfrak{B}$  —  $\sigma$ -алгебра;  $P_c$  — вероятностная мера. Параметр  $c$  будем называть стратегией природы.

В задаче регрессионного анализа в качестве значений целевой переменной выступает множество  $Y = (-\infty, +\infty)$ .

Решающей функцией называется соответствие  $\lambda: X \rightarrow Y$ . Качество принятого решения оценивается заданной функцией потерь  $\mathcal{L}: Y^2 \rightarrow [0, \infty)$ . Под риском будем понимать средние потери:

$$R(c, \lambda) = E_c \mathcal{L}(y, \lambda(x)) = \int_D \mathcal{L}(y, \lambda(x)) P_c(dx, dy), \quad x \in X, y \in Y.$$

В данной работе будем рассматривать функции потерь вида  $\mathcal{L}(y, y') = \mathcal{L}_R(F(y), F(y'))$ , где  $F(y)$  — функция распределения.

С таким критерием задачу построения решающих функций будем называть задачей ранговой регрессии. Такой термин представляется оправданным, поскольку функция распределения может интерпретироваться как непрерывное обобщение нормированного ранга. Заметим, что эмпирическая функция распределения — это в точности нормированный ранг выборочного значения целевой переменной.

Рассматриваемая функция потерь использует квантильное преобразование целевой переменной, поэтому задачу можно также называть задачей квантильной регрессии, хотя последний термин принято использовать в несколько ином значении.

Пусть  $V_N = ((x^i, y^i) \in D \mid i = 1, \dots, N)$ ,  $V_N \in D^N$  — случайная независимая выборка из распределения  $P_c$ .

Метод (алгоритм) построения решающих функций есть отображение  $Q: \mathcal{V} \rightarrow \Lambda$ , где  $\Lambda$  — заданный класс решающих функций;  $\mathcal{V} = \bigcup_{N=1}^{\infty} D^N$  — множество всевозможных выборок;  $\lambda_{Q,V}$  — функция, построенная по выборке  $V$  методом  $Q$ .

При оценивании риска по выборке вместо функции распределения используется эмпирическая функция распределения.

Заметим, что оптимальным решением при рассматриваемом критерии качества будет условная медиана, которая также является оптимальным решением для критерия с функцией потерь  $\mathcal{L}(y, y') = |y - y'|$ . Однако это не означает, что рассматриваемая задача эквивалентна задаче регрессии с критерием MAE (mean absolute error, среднее абсолютное отклонение), поскольку выборочное решение (как правило) отличается от оптимального [9]; кроме того, решение может быть неоптимальным [10] из-за ограничений класса решений [11, 12].

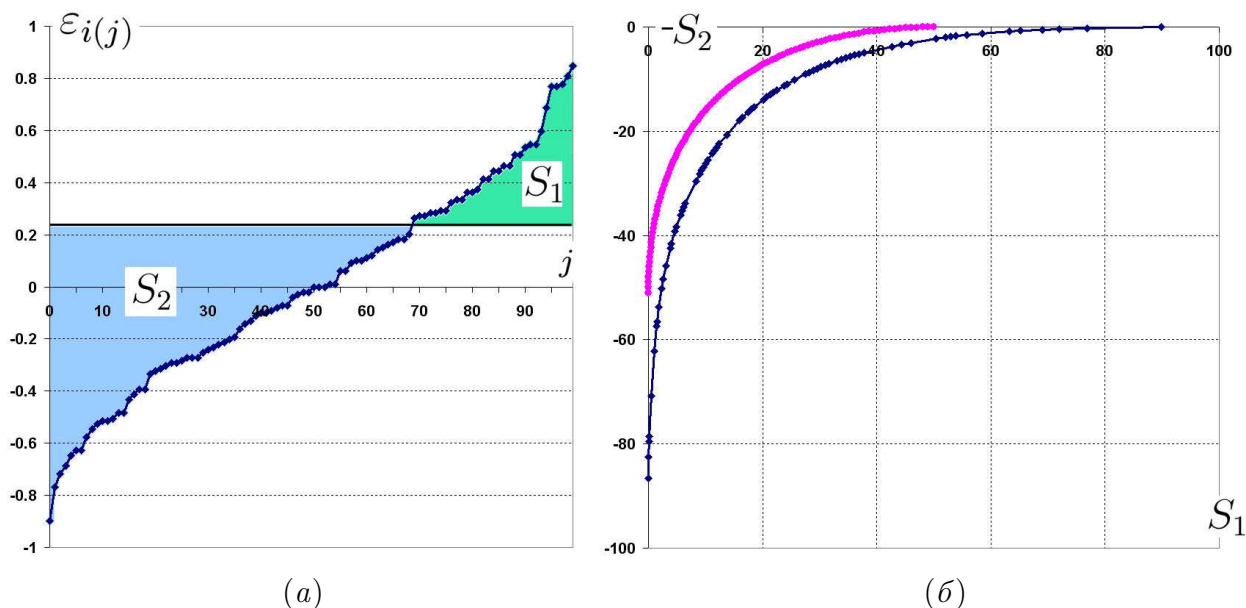
### 3 Кривые REC и RROC

Рассмотрим известные способы определения кривой ошибок в задаче регрессионного анализа.

Кривая REC — это по сути эмпирическая функция распределения для величины ошибки (потерь). Единственное отличие в том, что эмпирическая функция распределения ступенчатая, а REC-кривая соединяет вершины «ступенек» отрезками.

В работе [7] показывается, что данная кривая обладает некоторыми свойствами, схожими со свойствами ROC-кривой в задаче классификации. В частности, из двух решений лучше то, для которого REC-кривая лежит выше.

Однако REC-кривая вряд ли может рассматриваться как аналог ROC-кривой, поскольку ее поведение в целом существенно иное.



**Рис. 1** Упорядоченный ряд регрессионных остатков (а) и построенная на его основе RROC-кривая (б)

Несколько сложнее определяется так называемая RROC-кривая [8].

Обозначим  $\varepsilon_i = y^i - \hat{y}^i$  — последовательность регрессионных остатков (отклонений истинных значений от прогнозируемых). Здесь  $\hat{y}^i = \lambda(x^i)$ .

Пусть  $i(j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , — перестановка индексов, которая упорядочивает значения  $\varepsilon_{i(j)}$  по неубыванию.

Введем величины:

$$S_1(j) = \sum_{k=j}^N (\varepsilon_{i(k)} - \varepsilon_{i(j)}) ; \quad -S_2(j) = \sum_{k=1}^j (\varepsilon_{i(k)} - \varepsilon_{i(j)}) .$$

Кривая RROC определяется как ломаная с вершинами в точках  $(S_1(j), -S_2(j))$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Для наглядности построение RROC-кривой проиллюстрировано на рис. 1. Геометрически  $S_1$  и  $S_2$  есть площади соответственно над и под кривой  $\varepsilon_{i(j)}$  от заданной горизонтальной линии. При перемещении этой линии точка  $(S_1, -S_2)$  «прорисовывает» RROC-кривую.

В примере, изображенном на рис. 1, в качестве целевой переменной взят нормированный ранг  $y^i = (i - 1)/(N - 1)$ . В качестве прогнозируемых значений взят случайный нормированный ранг  $\hat{y}^i = (R(i) - 1)/(N - 1)$ , где  $R(i)$  — случайная перестановка индексов. Синяя кривая на правой диаграмме есть RROC-кривая для решения  $\hat{y}^i$ . Сиреневая RROC-кривая соответствует константному решению (когда в качестве прогноза используется выборочная медиана).

Очевидно, что в рассмотренном случае константное решение лучше случайного (в смысле средней ошибки). При этом RROC-кривая для него лежит выше RROC-кривой случайного решения. Это вполне соответствует ожиданиям, поскольку в задаче классификации ROC-кривая «хорошего» решения также лежит выше «плохого».

Однако заметим, что в задаче классификации ROC-кривая для наихудшего решения (т.е. для решения, которое состоит в случайном гадании) близка к прямой. В отличие

от этого RROC-кривая всегда вогнута (т. е. выпукла вверх) и для худшего решения, как видим, очень далека от прямой.

Данное отличие представляется очень существенным, и оно может затруднять использование RROC-кривой в качестве аналога ROC-кривой.

В следующем разделе делается попытка ввести понятие ROC-кривой для регрессионного анализа таким образом, чтобы ее свойства по возможности максимально совпадали со свойствами ROC-кривой.

## 4 Кривая ошибок для регрессии

Для построения ROC-кривой требуется задать порядок на объектах выборки.

Предположим, что данная нам выборка упорядочена (по возрастанию) в соответствии с прогнозируемым значением целевой переменной.

Сконструируем по исходной выборке  $V_N$  новую выборку  $V^r$  с бинарной целевой переменной.

Рассмотрим случай, когда все  $y^i$  различны. Обозначим  $r(i)$  — ранг значения  $y^i$ . Иными словами,  $r(i)$  — это перестановка индексов, которая упорядочивает значения  $y^i$  в выборке по возрастанию.

Для каждой пары  $(x^i, y^i)$  исходной выборки включим в новую выборку  $r(i) - 1$  пар  $(x^i, -1)$  и  $N - r(i)$  пар  $(x^i, 1)$ .

Для полученной выборки строим обычную ROC-кривую.

**Определение 1.** ROC-кривую, построенную по выборке  $V^r$ , назовем ROC<sub>r</sub>-кривой.

Алгоритм построения ROC<sub>r</sub>-кривой можно описать следующим образом.

Ставим «перо» в начало координат.

Далее перебираем (в заданном порядке) все объекты выборки, и для каждого объекта перемещаем «перо» на  $(r(i) - 1)/(N(N - 1))$  вправо и на  $(N - r(i))/(N(N - 1))$  вверх.

В итоге «перо» оказывается в точке  $(1, 1)$ .

На рис. 2, а сиреневым цветом изображена ROC<sub>r</sub>-кривая для случайного прогноза (в качестве решения выступает случайный порядок). Как видим, эта кривая флуктуирует в окрестности диагонали (пунктирная линия), т. е. ведет себя качественно так же, как ROC-кривая в задаче классификации при случайном упорядочивании объектов. Синим цветом на рис. 2, а показана ROC<sub>r</sub>-кривая для точного прогноза (для лучшего восприятия формы кривой серым цветом нарисована дуга окружности). Вид кривой значительно отличается от ROC-кривой в задаче классификации при оптимальном упорядочивании объектов.

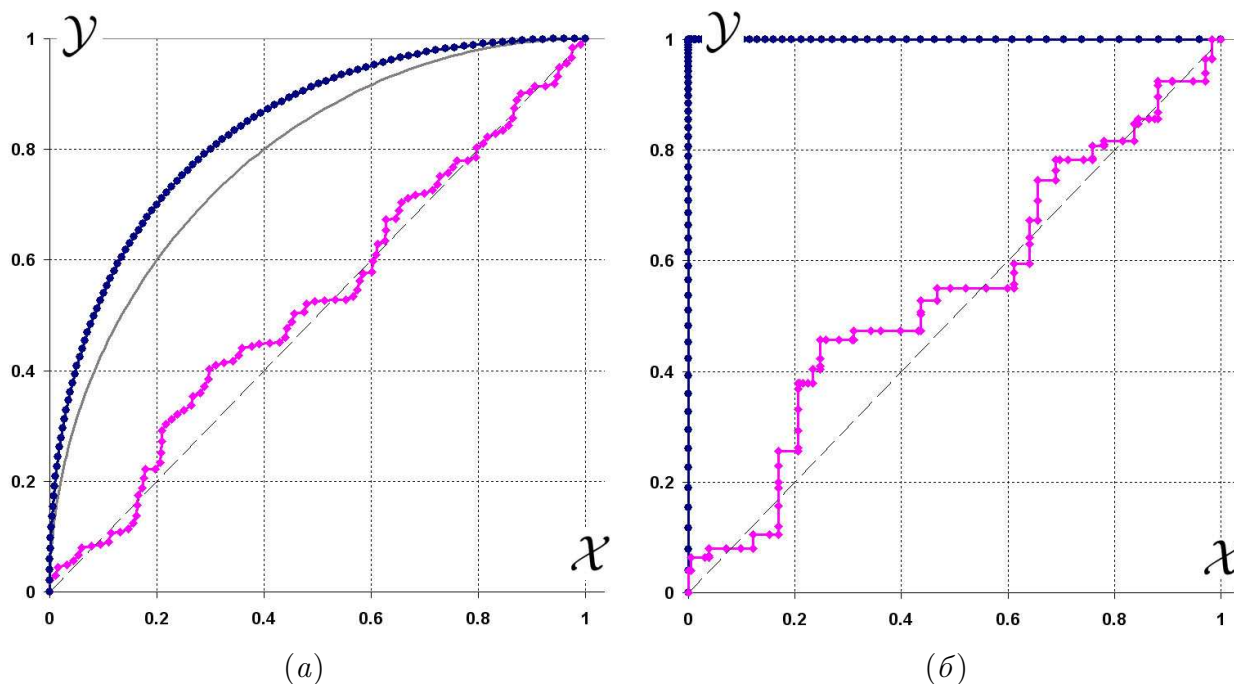
Чтобы добиться более полного сходства с ROC-кривой введем еще одну модификацию.

Для каждой пары  $(x^i, y^i)$  из исходной выборки  $V_N$  в новую выборку  $V^d$  включим  $|N + 1 - 2r(i)|$  пар  $(x^i, \text{sign}(N + 1 - 2r(i)))$ . Для полученной выборки также строим обычную ROC-кривую. В отличие от предыдущего варианта здесь мы «сокращаем» объекты противоположных классов (с одинаковыми  $x^i$ ).

**Определение 2.** ROC-кривую, построенную по выборке  $V^d$ , назовем ROC<sub>d</sub>-кривой.

Рисунок 2, б содержит ROC<sub>d</sub>-кривые, соответствующие ROC<sub>r</sub>-кривым рис. 2, а.

Визуально ROC<sub>d</sub>-кривые среди всех рассмотренных в большей степени соответствуют поведению ROC-кривых в задаче классификации. Однако ROC<sub>d</sub>-кривая имеет существенный недостаток, заключающийся в нечувствительности к изменению прогнозируемого ранга для объекта, у которого  $N + 1 - 2r(i) = 0$ .

Рис. 2 Кривые  $ROC_r$  (а) и  $ROC_d$  (б)

Наиболее подходящей для визуальной оценки информативности переменной представляется кривая  $ROC_r$ .

## 5 Эмпирический мост

Для анализа регрессионных зависимостей в работах [13, 14] предложено использовать конструкцию, названную эмпирическим мостом.

Эмпирический мост — это ломаная, соединяющая последовательность точек  $(j/N, (\Delta_j - (j/N)\Delta_N)/(\sigma\sqrt{N}))$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $\Delta_j = \sum_{k=1}^j \varepsilon_k$  — частичная сумма регрессионных остатков;  $\sigma$  — стандартное отклонение остатков.

Известно, что если регрессионные остатки независимы и одинаково распределены, то с ростом объема выборки эмпирический мост сходится к стандартному броуновскому мосту (броуновскому процессу, конечная точка которого зафиксирована и совпадает с начальной). Данный факт позволяет строить статистические критерии для оценки значимости систематического смещения регрессионных остатков.

Эмпирический мост дает более наглядную визуализацию поведения ошибок прогнозирования по сравнению с непосредственным изображением регрессионных остатков. Эмпирический мост представляет собой график кумулятивной ошибки, что позволяет увидеть смещенность прогноза, а также то, как смещение меняется в зависимости от значений переменной  $X$ .

Выясним, что представляет собой эмпирический мост, если в качестве значений целевой переменной взять ранги  $r(j)$ , а в качестве прогнозируемых значений — константу, равную среднему рангу, т. е.  $(N + 1)/2$ .

В этом случае  $\varepsilon_k = r(k) - (N + 1)/2$ , а  $\Delta_N = 0$ .

**Утверждение 1.** При повороте на  $45^\circ$  кривая  $ROC_r$  превращается в эмпирический мост для медианного прогноза с точностью до масштабирующих коэффициентов по осям координат.

**Доказательство.** Для доказательства утверждения проанализируем алгоритм построения ROC<sub>r</sub>-кривой.

Обозначим  $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}') = (1/\sqrt{2})(\mathcal{X} + \mathcal{Y}, \mathcal{Y} - \mathcal{X})$  — систему координат, полученную поворотом исходной системы координат  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  на 45°.

На каждом шаге алгоритма «перо» смещается вдоль оси  $\mathcal{X}'$  на величину

$$\sqrt{2} \left( \frac{r(i) - 1}{N(N - 1)} + \frac{N - r(i)}{N(N - 1)} \right) = \frac{\sqrt{2}}{N}$$

и вдоль оси  $\mathcal{Y}'$  на величину

$$\sqrt{2} \left( \frac{r(i) - 1}{N(N - 1)} - \frac{N - r(i)}{N(N - 1)} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{N(N - 1)} \left( r(i) - \frac{N + 1}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{N(N - 1)} \varepsilon_i.$$

■

**Утверждение 2.** При повороте на 45° кривая ROC<sub>d</sub> превращается в эмпирический мост для медианного прогноза с точностью до монотонной деформации по оси абсцисс и масштабирующего коэффициента по оси ординат.

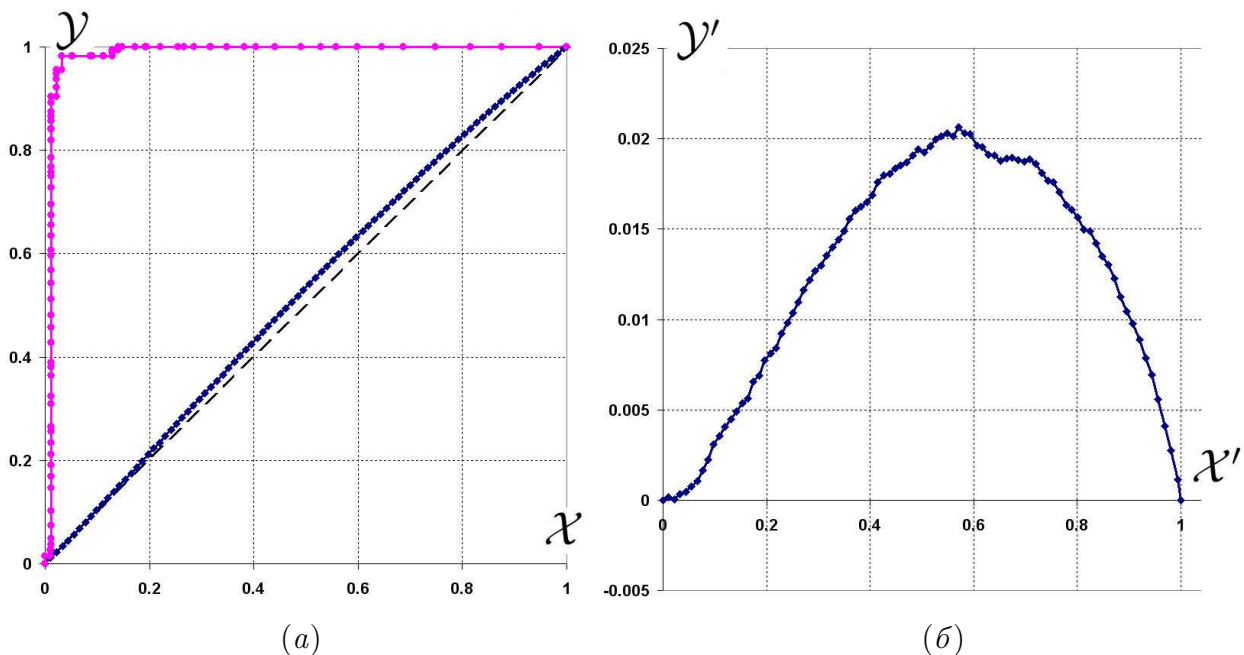
Утверждение доказывается аналогично предыдущему.

Таким образом, предложенный способ построения ROC-кривой для ранговой регрессии оказался эквивалентным некоторой разновидности эмпирического моста.

На рис. 3, а темно-синим цветом изображена кривая ROC<sub>r</sub>, сиреневым — ROC<sub>d</sub>. На рис. 3, б изображен эмпирический мост. Кривые построены для реальной задачи регрессионного анализа (Zillow's Home Value Prediction, kaggle.com).

Видим, что кривая ROC<sub>r</sub> близка к прямой, а кривая ROC<sub>d</sub> оказалась почти вырожденной. Наиболее информативной выглядит кривая эмпирического моста.

Напрашивается идея использовать конструкцию эмпирического моста вместо ROC-кривой и в задаче классификации.



**Рис. 3** Кривые ROC<sub>r</sub> и ROC<sub>d</sub> (а) и эмпирический мост для реальных данных (б)

Достаточно взять  $\varepsilon_k = y^k/N_{y^k}$ . Здесь  $y^k \in \{-1, 1\}$  обозначает класс, которому принадлежит объект выборки;  $N_y$  — количество объектов класса  $y$ .

Построенный таким образом эмпирический мост с точностью до поворота и масштаба совпадает с ROC-кривой.

## 6 Заключение

В работе были предложены некоторые естественные обобщения понятия ROC-кривой на случай регрессионного анализа. Данные модификации более полно воспроизводят свойства ROC-кривой по сравнению с известными вариантами ROC-кривой для регрессии, такими как RROC- и REC-кривые.

Наиболее важным из воспроизводимых свойств является то, что предложенные кривые при случайном прогнозе приближаются к прямой, а отклонения от прямой позволяют оценить информативность «объясняющей» переменной.

Предложенные варианты ROC-кривой оказались близкими понятию эмпирического моста, что свидетельствует об их содержательности. Один из вариантов ROC-кривой (кривая  $ROC_d$ ) наиболее полно соответствует визуальному образу ROC-кривой в задаче классификации. Вместе с тем, кривая  $ROC_d$  не вполне отражает информацию о качестве прогноза. Вопрос построения регрессионного аналога ROC-кривой, который бы полностью отражал все свойства этой кривой в задаче классификации, пока остается открытым.

## Литература

- [1] Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. — Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1999. 211 с.
- [2] Fawcett T. An introduction to ROC analysis // Pattern Recogn. Lett., 2006. Vol. 27. No. 8. P. 861–874.
- [3] Мотренко А. П. Многоклассовый прогноз вероятности наступления инфаркта // Машинное обучение и анализ данных, 2011. Т. 1. № 2. С. 225–235.
- [4] Ланге М. М., Ганебных С. Н., Ланге А. М. Многоклассовое распознавание образов в пространстве представлений с многоуровневым разрешением // Машинное обучение и анализ данных, 2016. Т. 2. № 1. С. 70–88. doi: 10.21469/22233792.2.1.06.
- [5] Неделько В. М. Регрессионные модели в задаче классификации // Сиб. ж. индустриальной математики, 2014. Т. 17. № 1. С. 86–98.
- [6] Mason S. J., Graham N. E. Areas beneath the relative operating characteristics (ROC) and relative operating levels (ROL) curves: Statistical significance and interpretation // Q. J. Roy. Meteor. Soc., 2002. Vol. 128. Iss. 584. P. 2145–2166. doi: 10.1256/003590002320603584.
- [7] Bi J., Bennett K. P. Regression error characteristic curves // 20th Conference (International) on Machine Learning Proceedings. — Washington, D.C., USA, 2003. P. 1–8.
- [8] Hernandez-Orallo J. ROC curves for regression // Pattern Recogn., 2013. P. 3395–3411. doi: 10.1016/j.patcog.2013.06.014.
- [9] Воронцов К. В., Фрей А. И., Соколов Е. А. Вычислимые комбинаторные оценки вероятности переобучения // Машинное обучение и анализ данных, 2013. Т. 1. № 6. С. 734–743.
- [10] Бериков В. Б., Лбов Г. С. Байесовские оценки качества распознавания по конечному множеству событий // Докл. РАН, 2005. Т. 402. № 1. С. 1–4.
- [11] Сологуб Р. А. Методы трансформации моделей в задачах нелинейной регрессии // Машинное обучение и анализ данных, 2015. Т. 1. № 14. С. 1961–1976. doi: 10.21469/22233792.1.14.06.

- [12] Генрихов И. Е., Дюкова Е. В., Журавлёв В. И. О полных регрессионных решающих деревьях // Машинное обучение и анализ данных, 2016. Т. 2. №1. С. 116–126. doi: 10.21469/22233792.2.1.09.
- [13] Гусарова Г. В., Ковалевский А. П., Макаренко А. Г. Критерии наличия разладки // Сиб. ж. индустриальной математики, 2005. Т. 8. №4. С. 18–33.
- [14] Ковалевский А. П., Шаталин Е. В. Выбор регрессионной модели зависимости массы тела от роста с помощью эмпирического моста // Вестник Томского гос. ун-та, 2015. №5(37). С. 35–47.

Поступила в редакцию 20.09.2017

## Estimation of feature importance for quantile regression

V. M. Nedel'ko

nedelko@math.nsc.ru

Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of RAS, 4 Acad. Koptyug pr., Novosibirsk, Russia

There are a large number of approaches to estimating the significance of variables in problems of constructing decision functions. One of the most important approaches is based on of the ROC (relative operating characteristics) curve (error curve). Initially, the ROC curves were introduced for classification models. The extension of ROC curves for regression problems has also been investigated. Notable examples are the so-called regression error characteristics (REC) curves and the Regression ROC (RROC) curves. However, these generalizations require the explicit specification of the predicted values of the target variable, while for constructing the ROC curve in the classification problem, one needs only the ordering of objects. There are also some other differences in essential properties of such regression ROC curves and classification ROC curves. The present author proposes some natural generalizations of the concept of the ROC curve for regression analysis, which reproduce more fully the properties of the ROC curve as compared to the known extensions. The most important of these properties is that the ROC curves move to a straight line, when built on random prediction. The deviations from the line allow one to estimate the importance of a variable. The proposed variants of the ROC curve for regression were found to be close to the construction of the empirical bridge.

**Keywords:** *ROC curve; regression; quantile regression; RROC curve; empirical bridge*

**DOI:** 10.21469/22233792.3.2.05

## References

- [1] Lbov, G. S., and N. G. Starceva. 1999. *Logicheskie reshayushchie funktsii i voprosy statisticheskoy ustoychivosti resheniy* [Logical decision functions and problem of statistical robustness of the solutions]. Novosibirsk: Institute of Mathematics SB RAS. 211 p.
- [2] Fawcett, T. 2006. An introduction to ROC analysis. *Pattern Recogn. Lett.* 27(8):861–874.
- [3] Motrenko, A. P. 2011. Mnogoklassovyy prognoz veroyatnosti nastupleniya infarkta [Multiclass forecast the likelihood of heart attack]. *Machine Learning Data Anal.* 1(2):225–235.
- [4] Lange, M. M., S. N. Ganebnykh, and A. M. Lange. 2016. Mnogoklassovoe raspoznavanie obrazov v prostranstve predstavleniy s mnogourovnevnyim razresheniem [Multiclass pattern recognition in a space of multiresolution representations]. *Machine Learning Data Anal.* 2(1):70–88. doi: 10.21469/22233792.2.1.06.



- [5] Nedel'ko, V. M. Regressionnyye modeli v zadache klassifikatsii [Regression models in the classification problem]. *Sib. zh. industrial'noy matematiki* [J. Ind. Appl. Math.] 17(1):86–98.
- [6] Mason, S. J., and N. E. Graham. 2002. Areas beneath the relative operating characteristics (ROC) and relative operating levels (ROL) curves: Statistical significance and interpretation. *Q. J. Roy. Meteor. Soc.* 128(584):2145–2166. doi: 10.1256/003590002320603584.
- [7] Bi, J., and K. P. Bennett. 2003. Regression error characteristic curves. *20th Conference (International) on Machine Learning Proceedings*. Washington, D.C. 1–8.
- [8] Hernandez-Orallo, J. 2013. ROC curves for regression. *Pattern Recogn.* 3395–3411. doi: 10.1016/j.patcog.2013.06.014.
- [9] Vorontsov, K. V., A. I. Frey, and E. A. Sokolov. 2013. Vychislimye kombinatornye otsenki veroyatnosti pereobucheniya [Computable combinatorial overfitting bounds]. *Machine Learning Data Anal.* 1(6):734–743.
- [10] Berikov, V. B., and G. S. Lbov. 2005. Bayes estimates for recognition quality on finite sets of events. *Dokl. Math.* 2005. 71(3):327–330.
- [11] Sologub, R. A. 2015. Metody transformatsii modeley v zadachakh nelineynoy regressii [Methods of the nonlinear regression model transformation]. *Machine Learning Data Anal.* 1(14):1961–1976. doi: 10.21469/22233792.1.14.06.
- [12] Genrikhov, I. E., E. V. Djukova, and V. I. Zhuravlyov. 2016. O polnykh regressionnykh reshayushchikh derev'yakh [About full regression decision trees]. *Machine Learning Data Anal.* 2(1):116–126. doi: 10.21469/22233792.2.1.09.
- [13] Gusarova, G. V., A. P. Kovalevskiy, and A. G. Makarenko. 2005. Kriterii nalichiya razladki [Statistical tests of a change-point]. *Sib. zh. industrial'noy matematiki* [J. Ind. Appl. Math.] 8(4):18–33.
- [14] Kovalevskii, A. P., and E. V. Shatalin. 2015. Vybor regressionnoy modeli zavisimosti massy tela ot rosta s pomoshch'yu empiricheskogo mosta [The choice of a regression model of the body weight on the height via an empirical bridge]. *Vestnik Tomskogo gos. un-ta* [Tomsk State University J. Mathematics and Mechanics] 5(37):35–47.

*Received September 20, 2017*