

# Об эффективности схем комплексирования данных для распознавания образов по ансамблю изображений\*

С. Н. Ганебных, М. М. Ланге

sng@ccas.ru; lange\_mm@ccas.ru

ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 44/2

Исследуются метрические многоклассовые классификаторы на ансамбле изображений от источников различной модальности. Классификаторы принимают коллективные решения по составным объектам, заданным наборами изображений, по одному от каждого источника. Разделяющие функции порождаются элементарными NN (nearest neighbor) или SVM (support vector machine) классификаторами типа «класс против всех». Исследуются две оригинальные схемы комплексирования данных, которые используют в разделяющих функциях либо композиции мер на множествах изображений источников (General Measure, GM), либо композиции мягких решений по изображениям источников (General Similarity, GS). В терминах вероятности ошибок предлагаемые схемы сравниваются с известной схемой голосования композиций жестких решений по изображениям источников (Majority Vote, MV). Сравнительная эффективность трех исследованных схем комплексирования данных продемонстрирована оценками доли ошибок распознавания лиц на ансамбле, заданном тремя декоррелированными компонентами RGB изображений. Экспериментально получены меньшие доли ошибок в схемах GM и GS по сравнению со схемой MV.

**Ключевые слова:** многоклассовый классификатор; ансамбль изображений; схема комплексирования; голосование по большинству; обобщенная мера; обобщенное сходство; распознавание лиц

DOI: 10.21469/22233792.3.1.06

## 1 Введение

Фундаментальные результаты по теории классификации с использованием ансамблей источников различной модальности демонстрируют возможность уменьшения доли ошибок путем объединения решений классификаторов по объектам индивидуальных источников [1]. Ансамбль порождает составные объекты, заданные наборами объектов одного класса, по одному от каждого источника. Способы построения коллективных решений по предъявляемым составным объектам базируются на различных схемах комплексирования данных. Широкое распространение получила схема комплексирования решений независимых классификаторов по объектам источников на основе голосования по большинству (Majority Vote) [2, 3]. В схемах голосования используются композиции жестких решений в форме суммарных голосов классификаторов по объектам источников, и коллективное решение по составному объекту принимается в пользу класса, получившего наибольший суммарный голос. В работах [4, 5] предложена схема комплексирования источников, в которой используется единый классификатор составных объектов с решающим правилом на основе обобщенной меры (General Measure) на ансамбле источников. Обобщенная мера является композицией мер на множествах объектов отдельных источников и позволяет

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты № 15-01-04671 и № 15-07-07516.

формировать коллективные решения с помощью одного классификатора с разделяющими функциями, строящимися в пространстве составных объектов. Теоретически показана возможность достижения меньшей вероятности ошибок в схеме GM по сравнению со схемой MV [5]. Помимо указанных схем целесообразно исследовать схему комплексирования мягких решений независимых классификаторов по объектам источников. Такие решения дают значения сходства объектов источников с классами, а их композиции — значения обобщенного сходства (General Similarity) составного объекта с соответствующими классами. В схеме GS коллективные решения по составным объектам выносятся единым классификатором с разделяющими функциями, построенными на значениях обобщенного сходства.

Модель классификации по ансамблю источников сходна с моделью кодирования сообщений непрерывного алфавита на основе квантования [6]. В модели кодирования используются схемы с одномерным (скалярным) или многомерным (векторным) квантованием, которые преобразуют блоки непрерывных сообщений в блоки дискретных значений с последующим их блоковым кодированием со скоростью, близкой к энтропии. Блоковое кодирование с одномерным квантованием использует набор независимых скалярных квантователей для отдельных сообщений, а блоковое кодирование с многомерным квантованием использует единый квантователь векторов сообщений в пространстве, размерность которого определяется длиной блоков. Квантами скалярного квантователя являются отрезки действительной оси, которые в многомерном пространстве дают непересекающиеся кубы, а квантами векторного квантователя — многогранники Вороного, которые порождаются покрытием пространства телами, согласованными с мерой расстояния в многомерном пространстве [7]. Эффективность оптимального скалярного и векторного квантования исследована соответственно в работах [8, 9]. Из приведенных в этих работах оценок энтропии выхода квантователя и оценок погрешности следует, что при фиксированной энтропии в пересчете на элемент блока оптимальное векторное квантование обеспечивает меньшую погрешность по сравнению с оптимальным скалярным квантованием.

Учитывая, что в предлагаемых схемах GM и GS коллективные решения выносятся одним классификатором, а в традиционной схеме MV такие решения строятся на композиции решений ансамбля классификаторов, идеологически схемы GM и GS сопоставимы с векторным квантованием блоков, а схема MV — со скалярным квантованием блоков. Отмеченная аналогия позволяет предположить возможность достижения более высокого качества классификации на основе применения схем GM и GS по сравнению со схемой MV.

Цель настоящей работы заключается в исследовании сравнительной эффективности классификаторов, построенных на основе указанных схем комплексирования. Рассматриваются классификаторы, образованные наборами элементарных NN и SVM классификаторов типа «класс против всех», разделяющие функции которых вычисляются соответственно по ближайшим соседям в классах [10] и по алгебраическим расстояниям до разделяющих гиперплоскостей [11]. Предлагается процедура обучения, и приводятся результаты тестирования многоклассовых классификаторов на ансамбле декоррелированных компонент RGB изображений лиц [12]. Результатами тестирования являются доли ошибок классификации, демонстрирующие более высокое качество классификаторов, использующих схемы GM и GS по сравнению с классификаторами на основе схемы MV.

## 2 Формальная постановка задачи

Рассматривается модель классификации, которая предполагает отнесение набора объектов от ансамбля источников к одному из классов множества  $\Omega = \{\omega_i, i = 1, \dots, c\}$ ,  $c \geq 2$ ,

с априорными вероятностями  $P(\omega_i) > 0 : \sum_{i=1}^c P(\omega_i) = 1$ . Пусть  $\mathbf{X}^M = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M)$  — ансамбль источников, в котором  $\mathbf{X}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , — множество объектов  $m$ -го источника, принадлежащих классам из  $\Omega$ . Любая последовательность  $\mathbf{x}^M = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M)$  объектов  $\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , принадлежащих одному и тому же классу, образует составной объект  $\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M$ , класс которого  $\omega_i \in \Omega$  необходимо найти. Как правило, ансамбль порождается наборами объектов различной модальности, например биометрическими измерениями, полученными от персон, которые образуют множество классов.

Будем считать, что на множестве объектов каждого источника для любой пары объектов  $\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m$  и  $\hat{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{X}_m$  определена мера различия

$$d(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}_m) \geq 0, m = 1, \dots, M, \quad (1)$$

и на ансамбле для любой пары составных объектов  $\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M$  и  $\hat{\mathbf{x}}^M \in \mathbf{X}^M$  введена обобщенная мера различия в форме линейной композиции

$$D(\mathbf{x}^M, \hat{\mathbf{x}}^M) = \sum_{m=1}^M w_m d(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}_m) \quad (2)$$

с весами источников

$$W = \{w_m > 0, m = 1, \dots, M\}. \quad (3)$$

На множествах объектов источников  $\mathbf{X}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , вводятся разделяющие функции:

$$g_i(\mathbf{x}_m) \propto P(\omega_i) p(\mathbf{x}_m | \omega_i), i = 1, \dots, c, \quad (4)$$

а на ансамбле  $\mathbf{X}^M$  — разделяющие функции:

$$g_i(\mathbf{x}^M) \propto P(\omega_i) p(\mathbf{x}^M | \omega_i), i = 1, \dots, c, \quad (5)$$

где  $p(\mathbf{x}_m | \omega_i)$  и  $p(\mathbf{x}^M | \omega_i)$  — условные по классу  $\omega_i$  плотности вероятностей  $\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m$  и  $\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M$ , строящиеся соответственно с использованием мер различия (1) и (2). Согласно формуле Байеса, разделяющие функции вида (4) и (5) пропорциональны соответствующим апостериорным вероятностям  $P(\omega_i | \mathbf{x}_m)$  и  $P(\omega_i | \mathbf{x}^M)$  и, следовательно, позволяют минимизировать вероятность ошибки классификации [11].

Пусть

$$\mathbf{X}_m^{\text{train}} \subset \mathbf{X}_m, m = 1, \dots, M, \quad (6)$$

есть обучающая выборка размера  $K_m = \|\mathbf{X}_m^{\text{train}}\|$  для  $m$ -го источника. Последовательность

$$\mathbf{X}^{M-\text{train}} = (\mathbf{X}_1^{\text{train}}, \dots, \mathbf{X}_M^{\text{train}}) \quad (7)$$

размера  $K = \|\mathbf{X}^{M-\text{train}}\|$  дает обучающую выборку на ансамбле  $\mathbf{X}^M$ . В случае однозначного соответствия объектов источников в ансамбле размеры обучающих выборок источников и ансамбля одинаковы  $K_m = K$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Обучающие выборки (6) разбиты на непересекающиеся кластеры так, что

$$\mathbf{X}_m^{\text{train}} = \bigcup_{i=1}^c \mathbf{X}_{im}^{\text{train}}, m = 1, \dots, M,$$

и последовательность  $i$ -х кластеров всех источников  $\mathbf{X}_i^{M-\text{train}} = (\mathbf{X}_{i1}^{\text{train}}, \dots, \mathbf{X}_{iM}^{\text{train}})$  образует  $i$ -й кластер в обучающей выборке (7).

Оценки плотностей  $p(\mathbf{x}_m|\omega_i)$  и  $p(\mathbf{x}^M|\omega_i)$  в (4) и (5) строятся на обучающих выборках (6) и (7) с использованием откликов элементарных классификаторов типа «класс  $\omega_i$  против подмножества  $\Omega \setminus \omega_i$ ». Отклики формируются в виде неотрицательных функций сходства объектов  $\mathbf{x}_m$  и  $\mathbf{x}^M$  с классом  $\omega_i$ , вычисляемых соответственно с использованием мер различия вида (1) или (2) и принимающих значения на отрезке  $[0,1]$ . Рассматриваются функции сходства

$$\left. \begin{aligned} s_i^d(\mathbf{x}_m) &\geq 0, \mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m, m = 1, \dots, M; \\ s_i^D(\mathbf{x}^M) &\geq 0, \mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M; \\ s_i^W(\mathbf{x}^M) &= \sum_{m=1}^M w_m s_i^d(\mathbf{x}_m) \geq 0, \mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

которые с точностью до мультипликативных констант дают оценки условных по классам плотностей

$$p(\mathbf{x}_m|\omega_i) \propto s_i^d(\mathbf{x}_m); \quad p(\mathbf{x}^M|\omega_i) \propto s_i^*(\mathbf{x}^M), \quad (9)$$

где  $s_i^*(\mathbf{x}^M)$  принимает значения  $s_i^D(\mathbf{x}^M)$  или  $s_i^W(\mathbf{x}^M)$ . Отметим, что отклики  $s_i^D(\mathbf{x}^M)$  определяются обобщенной мерой в виде линейной композиции (2), а отклики  $s_i^W(\mathbf{x}^M)$  задаются в форме линейной композиции откликов  $s_i^d(\mathbf{x}_m)$ ,  $i = 1, \dots, M$ , приведенной в (8).

Любой набор разделяющих функций  $\{g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, c\}$  на множестве  $\mathbf{X}$ , построенных с использованием обучающей выборки  $\mathbf{X}^{\text{train}} \subset \mathbf{X}$ , порождает классификатор  $F: \mathbf{X} \rightarrow \Omega$ , который дает решение

$$i_F(\mathbf{x}) = \arg \max_{i=1}^c g_i(\mathbf{x}) \quad (10)$$

для номера класса объекта  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ . Эффективность классификатора  $F$  оценивается средней долей ошибок

$$\varepsilon_F(\mathbf{X}^{\text{test}}) = \sum_{i=1}^c P(\omega_i) \varepsilon_F(\mathbf{X}^{\text{test}}|\omega_i), \quad (11)$$

где  $\varepsilon_F(\mathbf{X}^{\text{test}}|\omega_i)$  — доля ошибочных решений на преобразовании  $F$  по объектам тестовой выборки  $\mathbf{X}^{\text{test}}$  из класса  $\omega_i \in \Omega$ .

Использование в решающем правиле (10) разделяющих функций (4) с откликами  $s_i^d(\mathbf{x}_m)$ ,  $i = 1, \dots, M$ , порождает классификаторы, которые реализуют преобразования  $F_m: \mathbf{X}_m \rightarrow \Omega$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Комплексирование жестких решений таких классификаторов по схеме MV дает для предъявляемого составного объекта  $\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M$  коллективное решение в виде номера класса

$$j_{\text{MV}}(\mathbf{x}^M) = \arg \max_{i=1}^c \sum_{m=1}^M w_m \left[ \arg \max_{i=1}^c P(\omega_i) s_i^d(\mathbf{x}_m) = j \right], \quad (12)$$

где  $[z]$  — индикатор  $z$ .

Использование в решающем правиле (10) разделяющих функций (5) с откликами  $s_i^D(\mathbf{x}^M)$  или  $s_i^W(\mathbf{x}^M)$  порождает классификаторы вида  $F_W^M: \mathbf{X}^M \rightarrow \Omega$  с коллективным решением по схеме GM:

$$j_{\text{GM}}(\mathbf{x}^M) = \arg \max_{i=1}^c P(\omega_i) s_i^D(\mathbf{x}^M) \quad (13)$$

и с коллективным решением по схеме GS:

$$j_{\text{GS}}(\mathbf{x}^M) = \arg \max_{i=1}^c P(\omega_i) \sum_{m=1}^M w_m s_i^d(\mathbf{x}_m). \quad (14)$$

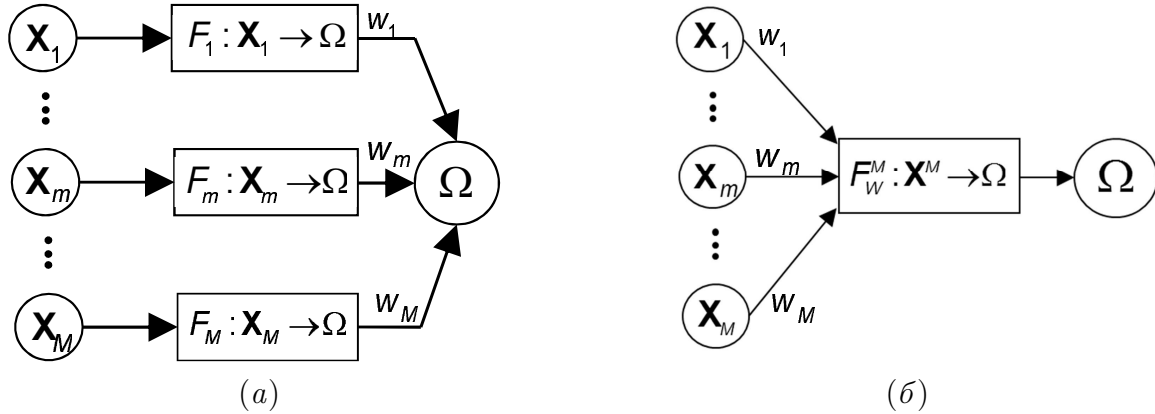


Рис. 1 Блок-схемы классификаторов на основе схем комплексирования MV (а) и GM/GS (б)

Схематически классификаторы, формирующие решения (12)–(14), даны на рис. 1. В приведенных схемах, уровни расположения весов источников соответствуют уровням вычисления композиций, которые используются в разделяющих функциях.

В работе [4] показано, что средняя взаимная информация [13] между ансамблем  $\mathbf{X}^M$  и множеством классов  $\Omega$ , в пересчете на один источник ансамбля, в схеме MV не превосходит аналогичной средней взаимной информации в схеме GM. Из этого утверждения следует, что при соответствующем выборе весовых коэффициентов (3) нижняя граница вероятности ошибок в схеме GM меньше или равна нижней границы вероятности ошибок в схеме MV [14]. Для реальных классификаторов, этот результат демонстрирует возможность достижения более высокого качества в схеме GM по сравнению со схемой MV. Учитывая сопоставимость решающих правил (13) и (14), аналогичное соотношение долей ошибок ожидается для схем GS и MV.

В рамках трех указанных схем комплексирования рассматриваются классификаторы, в которых функции сходства (8) формируются на откликах элементарных NN и SVM классификаторов. Элементарные NN классификаторы вычисляют функции сходства с классами для объектов множеств  $\mathbf{X}_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , и составных объектов ансамбля  $\mathbf{X}^M$ , используя отклонения предъявляемых объектов до ближайших объектов в кластерах обучающих выборок соответственно по мерам (1) и (2). Элементарные SVM классификаторы вычисляют аналогичные функции сходства по вторичным признакам [15], где объект  $m$ -го источника  $\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m$  задается вектором расстояний по мере (1) до всех объектов обучающей выборки (6)

$$\mathbf{x}_m \rightarrow \mathbf{y}^d(\mathbf{x}_m) = d(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}_{m1}), \dots, d(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}_{mK}), \hat{\mathbf{x}}_{mk} \in \mathbf{X}_m^{\text{train}}, k = 1, \dots, K,$$

а объект ансамбля  $\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M$  — вектором расстояний по мере (2) до всех объектов обучающей выборки (7)

$$\mathbf{x}^M \rightarrow \mathbf{y}^D(\mathbf{x}^M) = D(\mathbf{x}^M, \hat{\mathbf{x}}_1^M), \dots, D(\mathbf{x}^M, \hat{\mathbf{x}}_K^M), \hat{\mathbf{x}}_k^M \in \mathbf{X}^M_{\text{-train}}, k = 1, \dots, K.$$

Отклик SVM классификатора « $\omega_i$  против  $\Omega \setminus \omega_i$ » вычисляется по алгебраическому отклонению предъявляемого объекта от разделяющей гиперплоскости, которое согласно [11] определяется величиной  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{y} + a_i$ , где  $\mathbf{a}_i$  и  $a_i$  — соответственно вектор нормали и параметр смещения, оцениваемые по обучающей выборке. С учетом сделанных замечаний введенные в (8) отклики элементарных классификаторов определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned}
 s_i^d(\mathbf{x}^M) &= \left\{ \begin{array}{ll} \exp\left\{-\min_{\hat{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{X}_{im}^{\text{train}}} d(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}_m)\right\} & \text{для NN;} \\ (1 + \exp\left\{-\left(\mathbf{a}_{im}^\top \mathbf{y}^d(\mathbf{x}_m) + a_{im}\right)\right\})^{-1} & \text{для SVM;} \end{array} \right\} \\
 s_i^D(\mathbf{x}^M) &= \left\{ \begin{array}{ll} \exp\left\{-\min_{\hat{\mathbf{x}}^M \in \mathbf{X}_i^{\text{train}}} D(\mathbf{x}^M, \hat{\mathbf{x}}^M)\right\} & \text{для NN;} \\ (1 + \exp\left\{-\left(\mathbf{a}_i^\top \mathbf{y}^D(\mathbf{x}^M) + a_i\right)\right\})^{-1} & \text{для SVM.} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Исследуемая задача заключается в построении процедур обучения классификаторов, использующих схемы комплексирования MV, GS и GM, и проведении их тестирования на ансамбле декоррелированных компонент  $I_1(\text{R,G,B})$ ,  $I_2(\text{R,G,B})$  и  $I_3(\text{R,G,B})$  цветных RGB изображений лиц. Результаты тестирования даются в виде средних долей ошибок, полученных на классификаторах объектов индивидуальных источников  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  и для классификаторов составных объектов ансамбля  $(I_1, I_2, I_3)$ .

### 3 Представление и мера различия объектов

В этом разделе рассматривается способ древовидного представления объектов, порождаемых источниками изображений. В пространстве древовидных представлений с многоуровневым разрешением вводятся меры различия вида (1) и (2), которые позволяют вычислять отклики, заданные соотношениями (15), и соответствующие этим откликам разделяющие функции вида (4) и (5) с оценками (9).

Будем считать, что множеством объектов  $\mathbf{X}$  любого источника являются образы, выделенные на полутоновых изображениях и удовлетворяющие некоторым ограничениям. Налагаемые ограничения формируют множество допустимых образов, которые заданы наборами пикселей в виде компактных или распределенных двумерных тел, имеющих идентифицируемую систему собственных координат. Учитывая однотипность представлений для источников с номерами  $m = 1, \dots, M$ , в последующих обозначениях номер источника опущен.

В работе [16], предложен способ представления допустимых образов наборами эллиптических примитивов, структурированными в бинарные деревья. Способ основан на дихотомическом разбиении любого образа  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  на сегменты (наборы пикселей) и аппроксимации каждого сегмента с номером  $n$  эллиптическим примитивом  $Q_n$ , который соответствует вершине бинарного дерева. Каждый делимый сегмент с номером  $n$  дает пару новых сегментов и соответствующую пару аппроксимирующих примитивов с номерами  $2n + 1$  и  $2n + 2$ . Нумерация сегментов и примитивов производится с учетом ориентации главной собственной оси делимого сегмента. Выбор ориентации оси выполняется с учетом асимметрии делимого сегмента. Корневой примитив  $Q_0$  аппроксимирует исходный образ  $\mathbf{x}$  и имеет номер  $n = 0$ . Концевые вершины дерева примитивов соответствуют неделимым сегментам с числом пикселей не более заданного значения (например, сегменты, состоящие из одного пикселя). Аппроксимирующие примитивы строятся в декартовой системе собственных координат аппроксимируемых сегментов. В случае отсутствия у сегмента с номером  $n$  однозначно идентифицируемой системы собственных координат, примитив  $Q_n$  строится в системе координат сегмента-родителя с номером  $\lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ . Таким образом, для построения дерева примитивов, достаточно существования идентифицируемой системы собственных координат исходного образа, который является корневым сегментом с номером  $n = 0$ .

В соответствии с выбранным способом представления для любого допустимого образа (объекта)  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  строится последовательность представлений

$$\mathbf{x}^L = (x_0, \dots, x_l, \dots, x_L), \quad (16)$$

образующих полное бинарное дерево глубины  $L$ , в котором любая промежуточная вершина имеет две исходящие ветви. Любая подпоследовательность  $\mathbf{x}^l = (x_0, \dots, x_l)$ ,  $l = 0, \dots, L$ , в (16) является поддеревом глубины  $l$ , в котором набор концевых вершин-примитивов

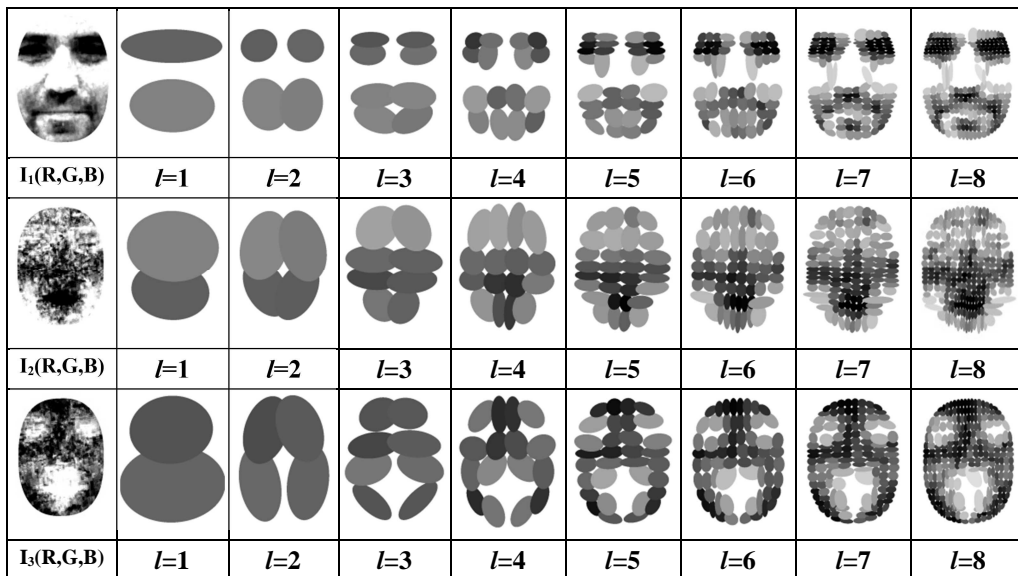
$$x_l = \{Q_n | n \text{ — номер концевого примитива в } \mathbf{x}^l\} \quad (17)$$

образует  $l$ -й слой полного дерева глубины  $L$ . Каждый эллиптический примитив в (17) определяется набором параметров

$$Q_n = (\mathbf{r}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, z_n), \quad (18)$$

где  $\mathbf{r}_n$  — вектор центра эллипса;  $\mathbf{u}_n$  и  $\mathbf{v}_n$  — векторы большой и малой полуосей;  $z_n$  — средний уровень яркости пикселей в аппроксимируемом сегменте. Координаты центра, определяющие вектор  $\mathbf{r}_n$ , и радиусы, определяющие векторы  $\mathbf{u}_n$  и  $\mathbf{v}_n$ , вычисляются как параметры эллипса рассеяния соответствующего сегмента. Векторы  $\mathbf{r}_n$ ,  $\mathbf{u}_n$  и  $\mathbf{v}_n$  задаются в собственной системе координат образа  $\mathbf{x}$ . Разбиение делимого сегмента с номером  $n \geq 0$  производится осью, проходящей через центр этого сегмента и параллельной собственной оси сегмента с номером  $n = 0$  (соответствует образу  $\mathbf{x}$ ), относительно которой момент инерции объекта максимален. При указанной нумерации примитив  $Q_n$  находится в полном дереве на уровне  $l = \lfloor \log_2(n + 1) \rfloor$ . Параметры примитивов (18) с номерами  $n \geq 0$  нормируются относительно корневого примитива с номером  $n = 0$ .

На рис. 2 даны примеры представлений декоррелированных компонент  $I_1(R,G,B)$ ,  $I_2(R,G,B)$  и  $I_3(R,G,B)$  цветного RGB изображения лица, полученных с помощью функции `decorrstretch` пакета программ MATLAB (<http://www.mathworks.com/help/images/>



**Рис. 2** Примеры древовидных представлений образов лица для декоррелированных компонент цветного RGB изображения

ref/decorrstretch.html). На указанных компонентах изображения образы лица представлены слоями эллиптических примитивов, которые образуют завершенные бинарные деревья глубины  $L = 8$  с числом конечных вершин  $2^l$ ,  $l = 1, \dots, L$ .

Введем для образов  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  и  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$ , представленных деревьями  $\mathbf{x}^L$  и  $\hat{\mathbf{x}}^L$  вида (16) меры различия  $d^l(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \geq 0$  порядка  $l = 1, \dots, L$ . Мера порядка  $l$  вводится на пересечении  $\mathbf{x}^l \cap \hat{\mathbf{x}}^l$ , образованном множеством пар соответственных примитивов  $Q_n \in \mathbf{x}^l$  и  $\hat{Q}_n \in \hat{\mathbf{x}}^l$  в  $n$ -х вершинах поддеревьев  $\mathbf{x}^l \in \mathbf{X}^L$  и  $\hat{\mathbf{x}}^l \in \hat{\mathbf{X}}^L$  глубины  $l$ . Используя для соответственных примитивов  $Q_n$  и  $\hat{Q}_n$  описания в форме (18), определим для поддеревьев  $\mathbf{x}^l$  и  $\hat{\mathbf{x}}^l$  следующие функции различия порядка  $l$  по параметрам примитивов:

$$\left. \begin{aligned} \rho_r(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l) &= \sum_{n:(Q_n, \hat{Q}_n) \in \mathbf{x}^l \cap \hat{\mathbf{x}}^l} \lambda_n \|\mathbf{r}_n - \hat{\mathbf{r}}_n\|; \\ \rho_{uv}(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l) &= \sum_{n:(Q_n, \hat{Q}_n) \in \mathbf{x}^l \cap \hat{\mathbf{x}}^l} \lambda_n (\|\mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{u}}_n\| + \|\mathbf{v}_n - \hat{\mathbf{v}}_n\|); \\ \rho_z(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l) &= \sum_{n:(Q_n, \hat{Q}_n) \in \mathbf{x}^l \cap \hat{\mathbf{x}}^l} \lambda_n \|z_n - \hat{z}_n\|, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $\lambda_n$  — веса соответственных примитивов:

$$\lambda_n = \frac{[\log_2(n+1)] 2^{-[\log_2(n+1)]}}{\sum_{n:(Q_n, \hat{Q}_n) \in \mathbf{x}^l \cap \hat{\mathbf{x}}^l} [\log_2(n+1)] 2^{-[\log_2(n+1)]}},$$

а нормы заданы в метрике  $L_1$ . Функции (19) дают средние отклонения образов обучающей выборки  $\mathbf{X}^{\text{train}}$  относительно образа  $\hat{\mathbf{x}}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(\hat{\mathbf{x}}^l) &= \frac{1}{\|\mathbf{X}^{\text{train}}\| - 1} \sum_{\mathbf{x}^l: \mathbf{x} \in \mathbf{X}^{\text{train}}} \rho_r(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l); \\ \sigma_{uv}(\hat{\mathbf{x}}^l) &= \frac{1}{\|\mathbf{X}^{\text{train}}\| - 1} \sum_{\mathbf{x}^l: \mathbf{x} \in \mathbf{X}^{\text{train}}} \rho_{uv}(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l); \\ \sigma_z(\hat{\mathbf{x}}^l) &= \frac{1}{\|\mathbf{X}^{\text{train}}\| - 1} \sum_{\mathbf{x}^l: \mathbf{x} \in \mathbf{X}^{\text{train}}} \rho_z(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

С учетом соотношений (19) и (20) мера различия порядка  $l = 1, \dots, L$  для пары образов  $\mathbf{x}$  и  $\hat{\mathbf{x}}$  определяется функцией:

$$d^l(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l) = \frac{\rho_r(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l)}{\sigma_r(\hat{\mathbf{x}}^l)} + \frac{\rho_{uv}(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l)}{\sigma_{uv}(\hat{\mathbf{x}}^l)} + \frac{\rho_z(\mathbf{x}^l, \hat{\mathbf{x}}^l)}{\sigma_z(\hat{\mathbf{x}}^l)}. \quad (21)$$

Полагая, что источники ансамбля  $\mathbf{X}^M = \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M$  допускают древовидные представления образов в форме (16), функция (21), вычисленная для объектов  $m$ -го источника  $\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m$  и  $\hat{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{X}_m$  при значениях  $l = 1, \dots, L$ , дает семейство мер различия

$$d^l(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}_m) \geq 0, \quad l = 1, \dots, L, \quad (22)$$

вида (1). Взвешенная сумма (2) таких мер порождает на ансамбле  $\mathbf{X}^M$  семейство обобщенных мер различия

$$D^l(\mathbf{x}^M, \hat{\mathbf{x}}^M) \geq 0, \quad l = 1, \dots, L, \quad (23)$$



для составных объектов  $\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M$  и  $\hat{\mathbf{x}}^M \in \mathbf{X}^M$ . При любом фиксированном значении  $l = 1, \dots, L$  меры (22) и (23) позволяют, используя соотношения (15), вычислить функции откликов (8), которые совместно с оценками (9) дают разделяющие функции:

$$\left. \begin{aligned} &\{g_i^l(\mathbf{x}_m), i = 1, \dots, c\}; \\ &\{g_i^l(\mathbf{x}^M), i = 1, \dots, c\}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

вида (4) и (5) соответственно на множествах  $\mathbf{X}_m$  и  $\mathbf{X}^M$ .

## 4 Обучение и схема тестирования классификаторов

Обучение и тестирование классификаторов выполняется на ансамбле источников изображений, в котором каждое изображение допускает древовидное представление в форме (16). Применяется процедура многократного разбиения множества составных объектов ансамбля  $\mathbf{X}^M$  на обучающую  $\mathbf{X}^{M-\text{train}}$  и тестовую  $\mathbf{X}^{M-\text{test}}$  выборки по схеме « $N$  times, 2 fold cross-validation» [17]. Предполагается соответствие объектов источников в ансамбле, благодаря которому на каждом разбиении размеры выборок источников и ансамбля одинаковы и равны  $\|\mathbf{X}_m^{\text{train}}\| = \|\mathbf{X}^{M-\text{train}}\|$  и  $\|\mathbf{X}_m^{\text{test}}\| = \|\mathbf{X}^{M-\text{test}}\|$ ,  $m = 1, \dots, M$ . С учетом перестановки, каждое разбиение порождает две обучающих и две тестовых выборки.

Обучение включает получение оценок параметров (20), используемых в мере (21), оценивание параметров  $(\mathbf{a}_{im}^\top, a_{im})$  и  $(\mathbf{a}_i^\top, a_i)$  элементарных SVM классификаторов и весов источников  $w_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Параметры меры  $d^l(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}_m)$  вычисляются на обучающей выборке  $\mathbf{X}_m^{\text{train}} \subset \mathbf{X}_m$  по представлениям порядка  $l$ . Параметры  $(\mathbf{a}_{im}^\top, a_{im})$  и  $(\mathbf{a}_i^\top, a_i)$  в функциях (15) вычисляются соответственно на парах кластеров  $(\mathbf{X}_{im}^{\text{train}}, \mathbf{X}_m^{\text{train}} \setminus \mathbf{X}_{im}^{\text{train}})$  и  $(\mathbf{X}_i^{M-\text{train}}, \mathbf{X}^{M-\text{train}} \setminus \mathbf{X}_i^{M-\text{train}})$ ,  $i = 1, \dots, c$ , с использованием функции fitcecoc версии SVM из пакета программ MATLAB (<http://www.mathworks.com/help/stats/fitcecoc.html>). Оценка весового коэффициента  $w_m$  строится на обучающей выборке  $\mathbf{X}_m^{\text{train}}$  по представлениям порядка  $L$  и зависит от ошибки скользящего контроля  $\varepsilon_{F_m}^{\text{LOO}}(\mathbf{X}_m^{\text{train}})$  вида (11), вычисляемой по схеме «leave-one-out» с применением классификатора  $F_m: \mathbf{X}_m^{\text{train}} \rightarrow \Omega$ . В качестве весов используются оценки:

$$w_m = -\log \varepsilon_{F_m}^{\text{LOO}}(\mathbf{X}_m^{\text{train}}), \quad m = 1, \dots, M.$$

На каждом текущем разбиении обученным классификаторам предъявляются объекты соответствующих тестовых выборок и вычисляются доли ошибок  $\varepsilon_F^{(n)}$  вида (11), где  $F$  — тип классификатора, зависящий от применяемых элементарных классификаторов и схемы комплексирования. Усреднение долей ошибок тестирования по всем тестовым выборкам дает среднюю долю ошибок скользящего контроля:

$$\varepsilon_F^{\text{CV-test}} = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{2N} \varepsilon_F^{(n)}. \quad (25)$$

## 5 Экспериментальные результаты

Эксперименты выполнены на цветных RGB изображениях лиц, декоррелированные компоненты которых образуют ансамбль из трех источников. Множество изображений содержит 1000 образов от 25 персон, по 40 изображений от каждой персоны, полученных с изменением ракурса съемки. Исходные RGB изображения включают образы, принадлежащие  $c = 25$  классам с равными априорными вероятностями  $P(\omega_i) = 1/c$ ,  $i = 1, \dots, 25$ .

$l$	компоненты			схема комплексирования		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	MV	GS	GM
1	0,1117140	0,1638612	0,1448992	0,0627828	0,0153852	0,0150468
2	0,0333520	0,0180168	0,0266888	0,0058360	0,0020324	0,0019460
3	0,0146416	0,0040664	0,0068072	0,0008904	0,0001184	0,0001492
4	0,0062732	0,0024552	0,0034436	0,0002788	0,0000308	0,0000404
5	0,0048892	0,0016596	0,0021540	0,0000696	0,0000064	0,0000164
6	0,0042324	0,0009288	0,0015676	0,0000436	0,0000072	0,0000160
7	0,0039220	0,0005700	0,0014464	0,0000100	0,0000044	0,0000052
8	0,0037408	0,0006436	0,0012724	0,0000104	0,0000012	0,0000024
9	0,0035384	0,0006056	0,0013616	0,0000088	0,0000016	0,0000028
10	0,0034668	0,0005744	0,0012992	0,0000048	0,0000012	0,0000020

(а) классификаторы NN

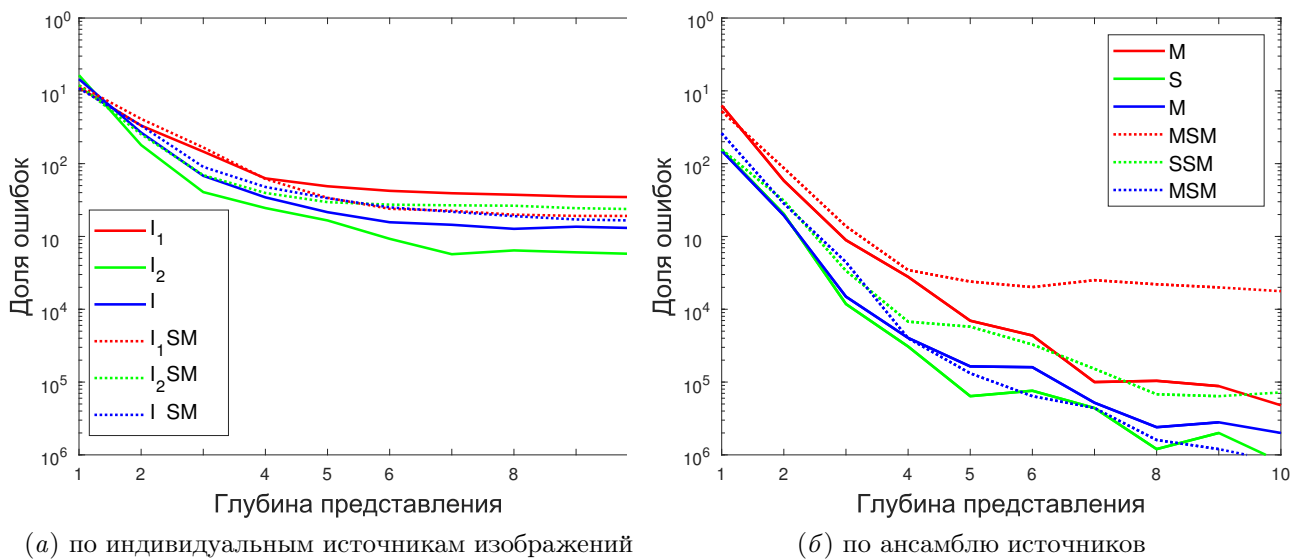
$l$	компоненты			схема комплексирования		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	MV	GS	GM
1	0,1185844	0,1195664	0,1081460	0,0524420	0,0156568	0,0261012
2	0,0411732	0,0252852	0,0332944	0,0087016	0,0030976	0,0028380
3	0,0166856	0,0069608	0,0090212	0,0013808	0,0003380	0,0004448
4	0,0061662	0,0039560	0,0047828	0,0003452	0,0000676	0,0000400
5	0,0033940	0,0029600	0,0033516	0,0002400	0,0000576	0,0000132
6	0,0023980	0,0027340	0,0025092	0,0002016	0,0000328	0,0000064
7	0,0022520	0,0026772	0,0021820	0,0002508	0,0000152	0,0000044
8	0,0019936	0,0026448	0,0019016	0,0002204	0,0000068	0,0000016
9	0,0019156	0,0024452	0,0017128	0,0001996	0,0000064	0,0000012
10	0,0019128	0,0023692	0,0016508	0,0001772	0,0000072	0,0000008

(б) классификаторы SVM

**Рис. 3** Ошибки классификации лиц по декоррелированным компонентам RGB изображений и по ансамблю компонент с использованием схем комплексирования MV, GS и GM: (а) классификаторы NN; (б) классификаторы SVM

Декоррелированные компоненты  $I_1(R,G,B)$ ,  $I_2(R,G,B)$  и  $I_3(R,G,B)$  RGB изображения образуют источники  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  и  $\mathbf{X}_3$  и ансамбль  $\mathbf{X}^3 = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$  изображений одинаковой мощности, равной 1000. Информативными объектами декоррелированных изображений являются образы лица, ограниченные параметрическим овалом, симметричным относительно нормали к линии глаз. Представления образов заданы наборами эллиптических примитивов, структурированных в бинарные деревья глубины  $L = 10$ . Эксперименты проведены с использованием процедуры скользящего контроля, с параметром  $N = 2500$ . Обучение и тестирование классификаторов с разделяющими функциями вида (24) выполнено на серии древовидных представлений образов порядка  $l = 1, \dots, L$ .

Результаты классификации в терминах долей ошибок вида (25), полученные для индивидуальных источников и для ансамбля с различными схемами комплексирования, представлены на рис. 3. Строки таблицы при фиксированных значениях  $l$  соответствуют средним значениям ошибок скользящего контроля для классификаторов, обученных по схеме «класс против всех», с использованием элементарных классификаторов типа NN и SVM.



**Рис. 4** Графики зависимости ошибок скользящего контроля от глубины представлений для классификаторов лиц с различными схемами комплексирования: (а) по индивидуальным источникам изображений; (б) по ансамблю источников

Зависимости доли ошибок от глубины  $l$  используемых представлений образов, построенные по данным таблицы, даны в виде графиков на рис. 4.

При любом фиксированном значении параметра  $l$  данные таблиц на рис. 3 демонстрируют более высокую эффективность схем комплексирования GM и GS по сравнению со схемой MV для классификаторов типа NN и SVM. С ростом  $l$  вероятность ошибок классификаторов уменьшается, но растет вычислительная сложность и, следовательно, требуемое время на принятие решения. Полученные зависимости вероятности ошибок от параметра  $l$  позволяют выбрать наименьшую глубину представляющих деревьев, обеспечивающую требуемое качество классификации.

Необходимо отметить, что вычисление откликов элементарных NN классификаторов на полных кластерах обучающей выборки приводит к переобучению и, следовательно, к завышению доли ошибок. Тот же эффект проявляется в элементарных SVM классификаторах, обучаемых в пространстве завышенной размерности, которая определяется числом элементов обучающей выборки. Уменьшение переобучения может быть достигнуто путем отбора эталонных объектов в кластерах обучающей выборки [10]. Отбор эталонов позволит вычислять отклики элементарных NN классификаторов по эталонным объектам в классах и понизит размерность признакового пространства элементарных SVM классификаторов за счет вычисления расстояний объектов только до эталонных объектов. В целом, отбор эталонов эквивалентен понижению размерности данных [18] и способен повысить разделяющую способность элементарных классификаторов, обучаемых по схеме «класс против всех».

## 6 Заключение

В настоящей работе исследованы многоклассовые метрические классификаторы на ансамбле изображений, порождаемых источниками различной модальности. Рассмотрены классификаторы, в которых коллективные решения по предъявляемым наборам изображений строятся на основе двух оригинальных схем комплексирования данных (схемы GM и GS) и традиционной схемы на основе голосования жестких решений по изображениям

отдельных источников (схема MV). В схеме GM использована композиция мер различия на множествах изображений отдельных источников, которая дает обобщенную меру различия составных объектов на ансамбле изображений. Схема GS использует композицию мягких решений классификаторов по изображениям отдельных источников в виде значений обобщенного сходства предъявляемого составного объекта с классами. Композиции в виде обобщенной меры и обобщенного сходства позволяют применить единый классификатор для построения коллективных решений по предъявляемым наборам изображений от ансамбля источников. Эффективность классификаторов на ансамбле источников базируется на средней взаимной информации между ансамблем и множеством классов, которая определяет наименьшую вероятность ошибки для заданной схемы комплексирования. Ранее было доказано, что средняя взаимная информация между множеством составных объектов и множеством классов в схеме GM превосходит среднюю взаимную информацию в схеме MV. Следствием этого результата является возможность достижения меньшей доли ошибок в схеме GM по сравнению со схемой MV.

В терминах доли ошибок экспериментально исследована сравнительная эффективность классификаторов, использующих схемы комплексирования GM, GS и MV, на ансамбле декоррелированных компонент RGB изображений лиц. Эксперименты проведены на классификаторах, обученных по схеме «класс против всех», с использованием разделяющих функций на основе ближайшего соседа (NN) и опорных векторов (SVM). Во всех случаях предложенные схемы комплексирования GM и GS продемонстрировали меньшую долю ошибок по сравнению с известной схемой MV. В перспективе планируется исследовать классификаторы с указанными схемами комплексирования на ансамблях данных других источников с применением решающего алгоритма, допускающего отказ.

## Литература

- [1] *Kuncheva L.* Combining pattern classifiers: Methods and algorithms. — 2nd ed. — Wiley, 2014. 384 p.
- [2] *Lam L., Suen S.* Application of majority voting to pattern recognition: An analysis of its behavior and performance // *Trans. Sys. Man Cyber. A*, 1997. Vol. 27. No. 5. P. 553–568. doi: 10.1109/3468.618255.
- [3] *Kuncheva L., Whitaker C., Shipp C., Duin R.* Limits on the majority vote accuracy in classifier fusion // *Pattern Anal. Appl.*, 2003. Vol. 6. No. 1. P. 22–31. doi: 10.1007/s10044-002-0173-7.
- [4] *Ланге М. М.* Информационный критерий для сравнения классификаторов на ансамбле источников // Тез. докл. 11-й Междунар. конф. «Интеллектуализация обработки информации». — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2016. С. 32.
- [5] *Lange M.* Information criterion of efficiency for metric classifiers in ensemble of sources // *Comm. Com. Inf. Sc.*, 2017 (in press).
- [6] *Gray R., Neuhoff D.* Quantization // *IEEE T. Inform. Theory*, 1998. Vol. 44. No. 6. P. 2325–2383. doi: 10.1109/18.720541.
- [7] *Kolmogorov A., Tikhomirov V.*  $\varepsilon$ -entropy and  $\varepsilon$ -capacity of sets in functional spaces // *Selected works of A. N. Kolmogorov. Vol. III: Information theory and the theory of algorithms.* — Mathematics and its applications ser. — Springer, 1993. P. 86–170. doi: 10.1007/978-94-017-2973-4\_7.
- [8] *Koshelev V.* Quantization with minimum entropy // *Probl. Inf. Transm.*, 1963. Vol. 14. P. 151–156.
- [9] *Белавкин В. П., Гришанин Б. А.* Оптимальное квантование векторных случайных величин // *Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика*, 1970. Т. 1. С. 161–170.

- [10] *Lange M., Ganebnykh S.* Multiclass pattern recognition in a space of multiresolution representations // *Machine Learning Data Anal.*, 2016. Vol. 2. No. 1. P. 70–88. doi: 10.21469/22233792.2.1.06.
- [11] *Duda R., Hart P., Stork D.* Pattern classification. — 2nd ed. — Wiley, 2000. 680 p.
- [12] Collection of color faces. <http://sourceforge.net/projects/colorfaces/>.
- [13] *Gallager R.* Information theory and reliable communication. — Wiley, 1969. 608 p.
- [14] *Dobrushin R., Tsybakov B.* Information transmission with additional noise // *IRE T. Inform. Theor.*, 1962. Vol. 8. No. 5. P. 293–304. doi: 10.1109/TIT.1962.1057738.
- [15] *Duin R., de Ridder D., Tax D.* Experiments with a featureless approach to pattern recognition // *Pattern Recogn. Lett.*, 1997. Vol. 18. No. 11. P. 1159–1166. doi: 10.1016/S0167-8655(97)00138-4.
- [16] *Ganebnykh S., Lange M., Stepanov D.* Metric classifier using multilevel network of templates // *Pattern Recognition Image Anal.*, 2012. Vol. 22. No. 2. P. 265–277. doi: 10.1134/S1054661812020034.
- [17] *Theodoridis S., Koutroumbas K.* Pattern recognition. — 4th ed. — Academic Press, 2008. 978 p.
- [18] *Tenenbaum J., De Silva V., Langford J.* A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction // *Science*, 2000. Vol. 290. P. 2319–2323.

Поступила в редакцию 18.09.2017

## On efficiency of fusion schemes for pattern recognition in ensemble of images\*

*S. N. Ganebnykh and M. M. Lange*

sng@ccas.ru; lange\_mm@ccas.ru

Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS, 44/2 Vavilova Str., Moscow, Russia

In an ensemble of image sources of different modalities, some metric multiclass classifiers are studied. The classifiers make the collective decisions for the composite objects that are produced by collections of the images with one from each source. The discriminant functions of the multiclass classifiers are produced by the binary “class-vs-all” NN or SVM classifiers. Two original fusion schemes that use the discriminant functions based on the different compositions are suggested. The first scheme uses the compositions of the dissimilarity measures between the images within each source (General Measure, GM) whereas the second scheme uses the compositions of the soft decisions for the images in the submitted composite object (General Similarity, GS). In terms of error rates, the proposed GM and GS fusion schemes are compared with the known MV (Majority Vote) scheme which is based on majority voting the compositions of the hard decisions for the individual source images. The comparative efficiency of the above fusion schemes is supported by the error rates for recognition of the RGB face images given by the ensemble of their three decorrelated components. For the NN and SVM classifiers, the experimental estimations of the error rates show a profit of the GM and GS schemes in comparison with the MV scheme.

**Keywords:** *multiclass classifier; ensemble of images; fusion scheme; majority vote; general measure; general similarity; face recognition*

**DOI:** 10.21469/22233792.3.1.06

---

\*The research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants 15-01-04671 and 15-07-07516).

## References

- [1] Kuncheva, L. 2014. *Combining pattern classifiers: Methods and algorithms*. 2nd ed. Wiley. 384 p.
- [2] Lam, L., and S. Suen. 1997. Application of majority voting to pattern recognition: An analysis of its behavior and performance. *Trans. Sys. Man Cyber. A* 27(5):553–568. doi: 10.1109/3468.618255.
- [3] Kuncheva, L., C. Whitaker, C. Shipp, and R. Duin. 2003. Limits on the majority vote accuracy in classifier fusion. *Pattern Anal. Appl.* 6(1):22–31. doi: 10.1007/s10044-002-0173-7.
- [4] Lange, M. 2016. Information criterion for comparison of metric classifiers in ensemble of sources. *11th Conference (International) “Intelligent Data Processing: Theory and Applications”*. Book of abstracts. Moscow: TORUS PRESS. 33.
- [5] Lange, M. 2017 (in press). Information criterion of efficiency for metric classifiers in ensemble of sources. *Comm. Com. Inf. Sc.*
- [6] Gray, R., and D. Neuhoff. 1998. Quantization. *IEEE Trans. Inform. Theory* 44(6):2325–2383. doi: 10.1109/18.720541.
- [7] Kolmogorov, A., and V. Tikhomirov. 1993.  $\varepsilon$ -entropy and  $\varepsilon$ -capacity of sets in functional spaces. *Selected works of A.N. Kolmogorov. Vol. III: Information theory and the theory of algorithms*. Mathematics and its applications ser. Springer. 86–170. doi: 10.1007/978-94-017-2973-4\_7.
- [8] Koshelev, V. 1963. Quantization with minimum entropy. *Probl. Inf. Transm.* 14:151–156.
- [9] Belavkin, V., and B. Grishanin. 1970. Optimal’noe kvantirovanie vektornykh sluchaynykh velichin [Optimal vector quantization of random variables]. *Izv. AN SSSR. Ser. Tekhnicheskaya kibernetika* [Sov. J. Comput. Syst. S.] 1:161–170.
- [10] Lange, M., and S. Ganebnykh. 2016. Multiclass pattern recognition in a space of multiresolution representations. *Machine Learning Data Anal.* 2(1):70–88. doi: 10.21469/22233792.2.1.06.
- [11] Duda, R., P. Hart, and D. Stork. 2000. *Pattern classification*. 2nd ed. Wiley. 680 p.
- [12] Collection of color faces. Available at: <http://sourceforge.net/projects/colorfaces/> (accessed July 4, 2017).
- [13] Gallager, R. 1969. *Information theory and reliable communication*. Wiley. 608 p.
- [14] Dobrushin, R., and B. Tsybakov. 1962. Information transmission with additional noise. *IRE T. Inform. Theor.* 8(5):293–304. doi: 10.1109/TIT.1962.1057738.
- [15] Duin, R., D. de Ridder, and D. Tax. 1997. Experiments with a featureless approach to pattern recognition. *Pattern Recogn. Lett.* 18(11):1159–1166. doi: 10.1016/S0167-8655(97)00138-4.
- [16] Ganebnykh, S., M. Lange, and D. Stepanov. 2012. Metric classifier using multilevel network of templates. *Pattern Recognition Image Anal.* 22(2):265–277. doi: 10.1134/S1054661812020034.
- [17] Theodoridis, S., and K. Koutroumbas. 2008. *Pattern recognition*. 4th ed. Academic Press. 978 p.
- [18] Tenenbaum, J., V. De Silva, and J. Langford. 2000. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science* 290:2319–2323.

*Received September 18, 2017*