

Медиальная ширина фигуры – дескриптор формы изображений*

Л. М. Местецкий

mestlm@mail.ru

Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, Москва, Ленинские горы, МГУ,
2-й учебный корпус

Задача генерации классификационных признаков для объектов переменной формы, таких например, как фигура человека или животного, состоит в построении дескрипторов формы, которые сохраняют инвариантность при деформации объектов. В статье предлагается концепция построения такого интегрального дескриптора формы фигуры, называемого функцией медиальной ширины. Функция медиальной ширины определяется на основе скелета и радиальной функции фигуры. Скелет фигуры — это множество точек-центров вписанных в фигуру окружностей. Радиальная функция фигуры определена в точке скелета и равна радиусу вписанной в фигуру окружности с центром в этой точке. По определению медиальная ширина фигуры в точках скелета равна радиальной функции. Предлагается понятие медиальной ширины фигуры в каждой её точке. Ширину фигуры в точке определяем как длину проходящего через эту точку радиуса одного из максимальных вписанных в фигуру кругов. Затем определяем в фигуре подмножество заданной ширины, состоящее из всех точек фигуры, в которых медиальная ширина не превосходит заданного значения. После этого определяем функцию медиальной ширины фигуры, описывающую площадь подмножества заданной ширины как функцию от параметра ширины. Таким образом, функция медиальной ширины представляет собой функцию распределения медиальной ширины в точках фигуры. В статье предлагается эффективный алгоритм вычисления функции медиальной ширины для многоугольной фигуры. Алгоритм основан на построении диаграммы Вороного линейных сегментов, образующих границу фигуры. Алгоритм обобщается для так называемой циркулярной фигуры, получаемой скруглением углов в многоугольной фигуре. Выбор класса циркулярных фигур обусловлен тем, что ими можно аппроксимировать сложные формы объектов растровых изображений. Работоспособность и эффективность предлагаемого подхода демонстрируется вычислительным экспериментом на примере задачи сравнения формы ладоней при биометрической идентификации личности.

Ключевые слова: медиальная ширина; скелет; бицикл; диаграмма Вороного; многоугольная фигура.

Medial width of a figure – an image shape descriptor*

L. M. Mestetskiy

MSU Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Leninskie Gory, MSU, 2nd
Education Building

The problem of features generation for classification of flexible objects of variable shape, for example a human figure or an animal figure, is to build shape descriptors which remain invariant during deformation of objects. The paper proposes the concept of building such an integral figure shape descriptor called the function of the medial width. The concept of the

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-00716.

medial width function is defined on the basis of the skeleton and the radial function of a figure. The skeleton of a figure is a set of centers of circles inscribed in the figure. The radial function of a figure is defined at the skeleton point and is equal to the radius of the inscribed circle centered at that point.

The medial width in skeleton points is, by definition, equal to the radial function. A concept of the medial width in each point of a figure is introduced. The medial width in a point of a figure is defined as the maximum length of the radius of an inscribed circle passing through the point. The figure's subset of a given width is then defined, consisting of all the points of the figure with medial width not exceeding the given value. After that the medial width function of a figure describing the area of the subset of a given width as a function of the width parameter is defined. Thus, the medial width function is a width distribution function of a figure.

The paper proposes an efficient algorithm to compute the medial width function for polygonal figures. The algorithm is based on the construction of the Voronoi diagram of line segments forming the boundary of the figure. The solution is generalized for the so-called circular figure obtained by replacing the corners of a polygonal figure with conjugate circular arcs. The choice of the class of circular figures is governed by their ability to approximate complex shapes of image objects. Efficiency of the proposed approach is demonstrated by the example of palm shape comparison for biometric identification.

Keywords: medial width; skeleton; bicircle; Voronoi diagram; polygonal figure.

Введение

Классификация формы объектов изображения требует построения признакового описания объектов, отражающего особенности их формы. Задача генерации классификационных признаков для объектов переменной формы, таких например, как фигура человека или животного, состоит в построении дескрипторов формы, которые сохраняют инвариантность при деформации объектов.

Важную роль в классификации формы объектов, имеющих протяжённые элементы, играют срединные оси, или скелеты. Скелет фигуры - это множество точек-центров вписанных в фигуру окружностей. Скелет имеет вид плоского геометрического графа. Анализ этого графа даёт возможность строить различные топологические и метрические признаки формы объекта.

Также информативным признаком формы является ширина объекта относительно срединных осей. Ширина объекта описывается радиальной функцией скелета, которая каждой точке скелета ставит в соответствие радиус вписанной в фигуру окружности с центром в этой точке. Совокупность срединных осей и радиальной функции называется медиальным представлением фигуры [1].

Распределение ширины объекта часто является инвариантом при деформациях объектов, а также имеет отличительные особенности для различных классов объектов. Поэтому ширина объектов используется для генерации признаков при распознавании формы изображений. В качестве интегрального дескриптора ширины объекта может быть использовано понятие *pattern spectrum*, введённое в [2]. В русскоязычной литературе обычно используется введённый Ю.В. Визильтером термин «морфологический спектр». Аппарат морфологических спектров активно развивается и используется в приложениях к распознаванию изображений в работах Ю.В. Визильтера и учеников [3, 4, 5]. Вообще морфологические спектры имеют различные применения в анализе и распознавании изображений.

Для оценки ширины объекта используется простой частный случай спектра с дисковым структурным элементом.

Традиционный подход к вычислению морфологических спектров основан на использовании методов дискретной математической морфологии. Для получения спектра требуется многократное преобразование изображения с помощью операций морфологического открытия. Поскольку открытия должны выполняться строго последовательно, соответствующие вычисления являются весьма ресурсоемкими по времени. Высокие затраты времени на вычисление морфологического спектра долгое время служили препятствием для его использования при обработке видеопоследовательностей и при анализе сложных изображений высокого разрешения. Работы Ю.В. Визильтера и С.В. Сидякина [4, 5] позволили существенно сократить затраты времени на вычисление морфологических спектров с дисковым структурным элементом за счёт использования концепции непрерывного скелета бинарного изображения [6]. Полученное на основе скелета непрерывное медиальное представление формы объекта позволило сократить большое число операций над растровым изображением, что привело к существенному ускорению вычислений. Однако совсем исключить растровую обработку авторам не удалось. Место растровых операций открытия заняли операции дискретизации скелета и кругов медиального представления объекта. Для этого потребовалась растеризация скелета с помощью алгоритма Брезенхэма и многократная растеризация перекрывающихся кругов. Работа Е.Ю. Макаровой [7] показала, что использование непрерывного медиального представления формы не позволяет точно вычислить морфологический спектр, а допускает лишь некоторое приближенное его построение.

Предлагаемый в настоящей статье новый дескриптор ширины объекта основан на непрерывном медиальном представлении фигуры и может быть вычислен точно с высокой эффективностью. Новый дескриптор, названный функцией медиальной ширины фигуры, основывается на следующих принципах.

1. На основе медиального представления фигуры вводим понятие медиальной ширины фигуры в каждой её точке.
2. Определяем в фигуре подмножество заданной ширины, состоящее из всех точек фигуры, в которых медиальная ширина не превосходит заданное значение.
3. Определяем функцию медиальной ширины фигуры, описывающую площадь подмножества заданной ширины как функцию от параметра ширины.

Функция медиальной ширины является монотонной кусочно-непрерывной. Она может иметь лишь конечное число разрывов первого рода. Эта функция может быть использована для генерации признакового описания формы аналогично морфологическому спектру. Для этого строится ее дискретная разностная гистограмма, которую по аналогии будем называть медиальным спектром фигуры.

В статье предлагается метод прямого вычисления медиальной ширины для многоугольных фигур (многоугольник с многоугольными дырами). Метод основан на построении диаграммы Вороного линейных сегментов, составляющих границу многоугольной фигуры. Многоугольная фигура выбрана потому что, с одной стороны, для построения ее диаграммы Вороного существуют высокоэффективные алгоритмы [8, 6, 9]. С другой стороны, фигуры с нелинейной границей, а также растровые дискретные изображения можно с высокой точностью аппроксимировать многоугольными фигурами. Для более адекватной аппроксимации нелинейных и дискретных фигур вводится понятие циркулярной фигуры. Циркулярная фигура получается в результате процесса стрижки скелета

(gruning), приводящего к «скруглению» углов многоугольной фигуры дугами окружностей. Предложенный метод прямого вычисления медиальной ширины для многоугольных фигур легко обобщается на циркулярные фигуры.

Реализация и экспериментальная оценка предложенного подхода выполнена применительно к задаче биометрической идентификации личности по форме ладони. Известна работа, в которой решение этой задачи выполнено с использованием морфологического спектра [10]. Опыт этот можно считать положительным с точки зрения применения для распознавания формы интегрального показателя ширины объекта. Однако низкая вычислительная эффективность полученного решения не позволяет рассчитывать на его использование в биометрических системах реального времени. Наше решение наряду с хорошим качеством распознавания обеспечивает высокую вычислительную эффективность.

Медиальное представление и медиальная ширина фигуры

Определение 1. *Фигурой называется ограниченная замкнутая область на евклидовой плоскости.*

Определение 2. *Пустым кругом фигуры называется круг, целиком лежащий в фигуре.*

Определение 3. *Пустой круг называется вписанным кругом фигуры, если он является максимальным, т.е. не содержится ни в каком другом пустом круге.*

Определение 4. *Скелетом фигуры называется множество точек-центров всех вписанных кругов фигуры.*

На рис. 1 представлен пример фигуры в виде замкнутой области с одной дырой, граница которой состоит из двух замкнутых контуров. Здесь же показаны примеры вписанных кругов и скелет фигуры. Следует отметить особо круги A и B , имеющие нулевой радиус.

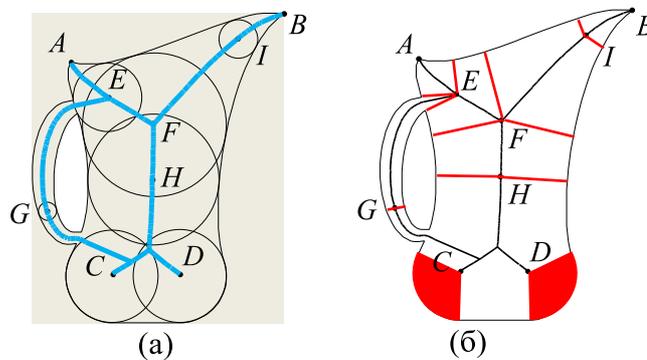


Рис. 1. (а) фигура, вписанные круги, скелет, (б) спицы.

Определение 5. *Радиальная функция определена в точках скелета и ставит в соответствие точке скелета радиус вписанного круга с центром в этой точке.*

Определение 6. *Спицей называется отрезок прямой, соединяющий точку скелета с ближайшей точкой границы фигуры.*

Количество спиц, связанных с точкой скелета, может существенно различаться. В примере на рис. 1б показаны спицы для некоторых точек скелета. Точки A и B имеют по одной спице нулевой длины, точки G, H, I имеют по две спицы, точки E и F – по три. А для точек C и D имеется бесконечное число спиц, которые заполняют сектора.

Будем использовать следующие обозначения:

R^2 – евклидова плоскость,

G – фигура, т.е. ограниченная замкнутая область $G \subset R^2$,

∂G – граница фигуры G ,

G' – внутренняя открытая область фигуры $G' = G \setminus \partial G$,

$C(P)$ – пустой круг с центром в точке $P \in G$,

S – скелет фигуры G .

Отметим некоторые важные свойства, связывающие точки фигуры с множеством спиц этой фигуры.

Лемма 1. *Через каждую точку фигуры проходит хотя бы одна спица. Следовательно, спицы покрывают всю фигуру.*

Доказательство. Пусть $P \in G$ и $Q \in \partial G$ ближайшая к P точка на границе фигуры (рис. 2). Пустой круг $C(P)$ с центром P имеет радиус PQ . Если этот круг максимальный, то P точка скелета, $P \in S$, и тогда отрезок PQ является спицей, инцидентной точке P . Если круг $C(P)$ не максимальный, то существует круг $C(P_1)$, такой что $C(P) \subset C(P_1)$. Тогда $Q \in C(P_1)$ и круги $C(P)$ и $C(P_1)$ имеют общую касательную в точке Q , а точка P_1 лежит на прямой PQ . В силу ограниченности фигуры G среди таких пустых кругов $C(P_1)$ существует максимальный круг $C(P^*)$. Тогда отрезок P^*Q является спицей, и точка P лежит на этой спице.

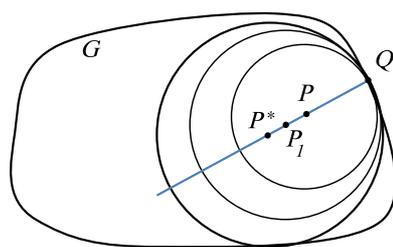


Рис. 2. К лемме 1.

Заметим, что данное рассуждение подходит и для частного случая, когда точка P является граничной, $P \in \partial G$, и $P = Q$. ■

Лемма 2. *Через каждую внутреннюю точку фигуры, не являющуюся точкой скелета, проходит только одна спица.*

Доказательство. Рассмотрим внутреннюю точку $P \in G'$ (рис. 3). Предположим, что через неё проходит несколько спиц. Выберем две из них AB и CD . Пусть A и C точки скелета, $A, C \in S$, а B и D – точки границы, $B, D \in \partial G$. Из $P \notin S$ и $P \notin \partial G$ следует, что P есть внутренняя точка отрезков AB и CD .

Треугольники $\triangle APD$ и $\triangle CPB$ невырожденные, следовательно $AP + PD > AD$ и $CP + PB > BC$.

Рассмотрим отрезки PB и PD .

Если $PB \geq PD$ то $AB = AP + PB \geq AP + PD > AD$. А если $PB < PD$ то $CD = CP + PD > CP + PB > CB$. Но точки A и C являются центрами максимальных пустых кругов, поэтому $AB \leq AD$ и $CD \leq CB$.

Следовательно, существование нескольких спиц, проходящих через точку P , невозможно. ■

Теперь определим понятие медиальной ширины фигуры в точке.

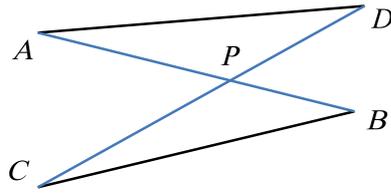


Рис. 3. К лемме 2.

Определение 7. Медиальная ширина фигуры во внутренней точке равна длине минимальной спицы, инцидентной этой точке.

Из леммы 1 следует, что медиальная ширина определена для всех внутренних точек фигуры. Все спицы, инцидентные одной точке скелета, имеют одинаковую длину равную радиусу пустого круга с центром в этой точке. Поэтому для точек скелета медиальная ширина просто равна радиальной функции. Для каждой внутренней точки, не являющейся точкой скелета, существует согласно лемме 2 единственная инцидентная спица, поэтому медиальная ширина в такой точке определена однозначно. Граничные точки фигуры могут иметь несколько инцидентных спиц.

Обозначим

$\varphi(g), g \in G'$ – медиальная ширина фигуры в точке g ,

$G'_w = \{g \in G', \varphi(g) \leq w\}$ – подмножество точек фигуры, в которых медиальная ширина не превосходит заданное значение $w \geq 0$,

$\mathcal{F}(w) = \mu(G'_w)$ – функция медиальной ширины фигуры, площадь множества точек G'_w ,

$f(w) = \frac{d\mathcal{F}(w)}{dw}$ – медиальный спектр фигуры.

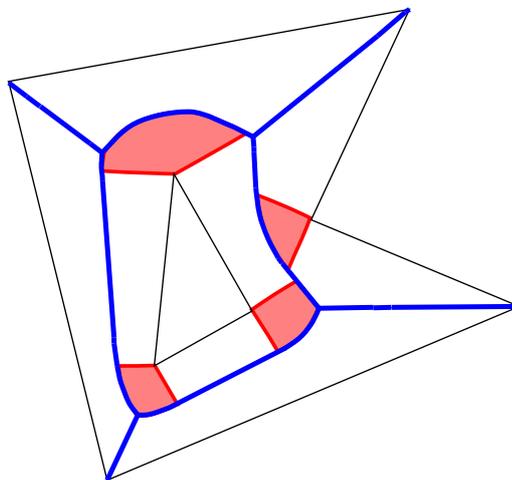


Рис. 4. Точки на границе многоугольной фигуры, имеющие более одной инцидентной спицы.

Точки фигуры, имеющие несколько инцидентных спиц разной длины, могут находиться лишь в угловых точках в вогнутых вершинах на границе фигуры. Примеры таких точек приведены на рис. 4. Но общая площадь границы равна нулю. Поэтому точки границы не вносят вклад в вычисление площади области заданной ширины. Поэтому медиальную ширину в точках границы можно положить равной нулю.

На рис. 5 представлен пример, показывающий подмножество точек фигуры, в которых медиальная ширина не превосходит заданное значение.

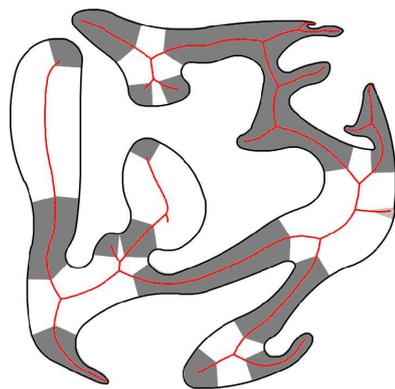


Рис. 5. Область заданной ширины в фигуре.

Многоугольные и циркулярные фигуры и их медиальная ширина

Многоугольная фигура определяется как ограниченная замкнутая область с границей, состоящей из многоугольников. Многоугольными фигурами можно аппроксимировать с высокой точностью любые фигуры, граница которых задана жордановыми кривыми. Кроме того, их можно использовать в качестве удобной непрерывной модели для аппроксимации объектов бинарных растровых изображений.

Границу многоугольной фигуры можно представить в виде множества сайтов-точек (вершин фигуры) и сайтов-сегментов (сторон фигуры). Для этого множества сайтов определена так называемая диаграмма Вороного линейных сегментов. Мы будем называть часть этой диаграммы Вороного, лежащую внутри фигуры, диаграммой Вороного (ДВ) многоугольной фигуры.

ДВ многоугольной фигуры представляет собой геометрический граф, рёбрами которого являются отрезки прямых линий и квадратичных парабол.

Пусть G – многоугольная фигура, $Vor(G) = \langle V, E \rangle$ – ДВ фигуры G . Здесь V – множество вершин, E – множество рёбер ДВ. С каждым ребром ДВ связана пара сайтов, для которых линия ребра является бисектором – общей границей их ячеек Вороного. Рассмотрим подграф ДВ $\langle V, E \rangle$, образованный из $Vor(G)$ путём отсечения части терминальных вершин и рёбер, инцидентных этим вершинам. Как известно, если отсечь вершины и рёбра $Vor(G)$, инцидентные вогнутым вершинам многоугольной фигуры, то объединение рёбер полученного подграфа образует скелет фигуры, т.е. $S = \bigcup_{e \in E'} e$. Это позволяет рассматривать скелет многоугольной фигуры как подграф ДВ $S = \langle V', E' \rangle$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Пусть S скелет многоугольной фигуры G . Определим процесс дальнейшей стрижки скелета, как последовательное отсечение некоторых терминальных вершин и инцидентных им рёбер ДВ, т.е. построение подграфов S_1, S_2, \dots, S_n таких, что $S_i = \langle V_i, E_i \rangle$, $S_{i+1} = \langle V_{i+1}, E_{i+1} \rangle$, $V_{i+1} = V_i \setminus \{v_i\}$, $E_{i+1} = E_i \setminus \{e_i\}$, $v_i \in V_i$, $e_i \in E_i$, и при этом вершина v_i является терминальной в подграфе S_i и она имеет инцидентное ребро e_i .

Определение 8. Подграфы ДВ, получаемые в результате процесса стрижки, называются скелетными подграфами.

Определение 9. Объединение $G' = \bigcup_{P \in S'} C(P)$ пустых кругов, центры которых расположены на скелетном подграфе $S' \subseteq S$, называется силуэтом скелетного подграфа или циркулярной фигурой.

Многоугольная фигура G может быть представлена в виде объединения всех пустых кругов с центрами в точках скелета $G = \bigcup_{P \in S} C(P)$, т.е. она является силуэтом полного скелета и представляет собой частный случай циркулярной фигуры.

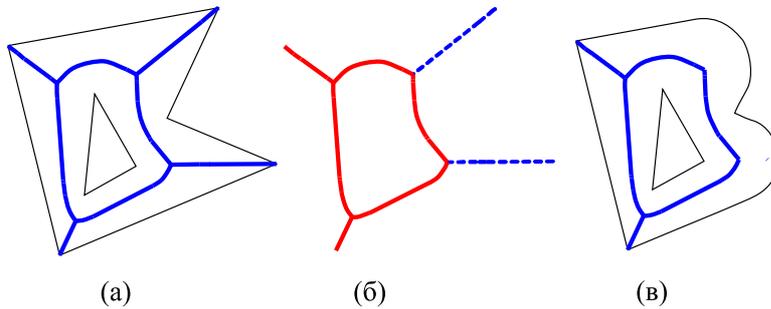


Рис. 6. (а) многоугольная фигура и её скелет, (б) скелетный подграф, полученный в результате стрижки, (в) циркулярная фигура.

В примере на рис. 6 представлена многоугольная фигура, её скелет, скелетный подграф, полученный в результате стрижки, и циркулярная фигура, образованная оставшимися после стрижки пустыми кругами этого подграфа.

Бициклы в многоугольных и циркулярных фигурах

Определение 10. Бициклом ребра скелета $e \in E$ называется объединение всех вписанных кругов с центрами на ребре e .

Определение 11. Собственной областью называется объединение всех спиц, инцидентных точкам ребра e и линейным ребрам границы фигуры.

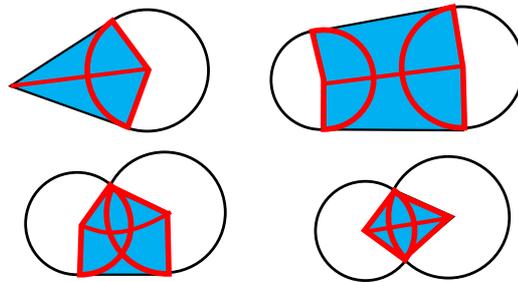


Рис. 7. Бициклы, собственные области, внешние и внутренние сектора концевых кругов.

Собственная область лежит целиком в бицикле. Граница собственной области состоит из двух сайтов и двух спиц. Круги с центрами в вершинах, инцидентных ребру, называются концевыми кругами бицикла. Каждый концевой круг разбивается на два сектора - внутренний и внешний. Внешний сектор опирается на дугу концевой круга, входящую в границу бицикла, а внутренний сектор представляет собой дополнение внешнего сектора в концевом круге (рис. 7).

Бициклы образуют покрытие всей многоугольной фигуры. При этом собственные области бициклов могут пересекаться только по своим граничным спицам.

Пусть B^e - собственная область бицикла ребра e . Рассмотрим множество точек $g \in B_x^e$, в которых медиальная ширина не превосходит величину $x \geq 0$, т.е. $B_x^e =$

$= \{g \in B^e, \varphi(g) \leq x\}$. Это множество B_x^e будем называть областью ширины x . Обозначим $\mu(B_x^e)$ – площадь этой области.

Определение 12. *Функцией медиальной ширины бицикла называется зависимость $\mathcal{F}^e(x) = \mu(B_x^e)$ площади области ширины x от параметра x .*

Собственные области двух рёбер могут иметь непустое пересечение по граничным спицам. Площадь пересечения равна нулю. Очевидно, что собственные области всех рёбер скелета покрывают всю многоугольную фигуру, поэтому функция медиальной ширины фигуры может быть выражена в виде суммы функций медиальной ширины бициклов рёбер её скелетного графа $\mathcal{F}(x) = \sum_{e \in E} \mathcal{F}^e(x)$.

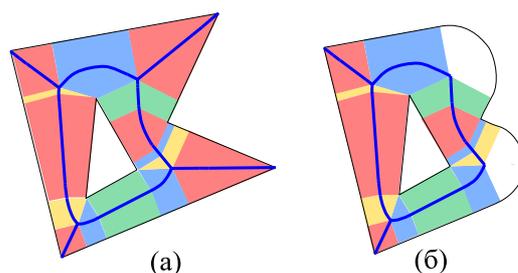


Рис. 8. Покрытие многоугольной и циркулярной фигур собственными областями бициклов и граничными секторами.

Циркулярная фигура также представляет собой объединение бициклов всех рёбер своего скелетного графа. Но при этом собственные области этих бициклов не покрывают целиком циркулярную фигуру. Часть циркулярной фигуры оказывается покрытой только внешними секторами бициклов (рис. 8б). С каждой вершиной скелета $v \in V$ связан один или несколько бициклов инцидентных рёбер.

Определение 13. *Граничным сектором циркулярной фигуры будем называть часть вписанного круга с центром в вершине $v \in V$, которая не покрывается собственными областями бициклов фигуры.*

Обозначим $\theta(v)$ площадь граничного сектора вершины v . Для циркулярной фигуры функция медиальной ширины выражается через медиальную ширину бициклов и площади граничных секторов

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{e \in E} \mathcal{F}^e(x) + \sum_{v \in V, r_v \leq x(v)} \theta(v).$$

Это позволяет свести задачу вычисления функции медиальной ширины многоугольных и циркулярных фигур к вычислению медиальной ширины отдельных бициклов.

Вычисление медиальной ширины бициклов

Различаются три типа бициклов в зависимости от пары образующих сайтов: сегмент-сегмент, сегмент-точка и точка-точка. В бицикле сегмент-сегмент ось бицикла является прямой линией, такой бицикл называется линейным. В бицикле сегмент-точка ось бицикла является параболой, поэтому такой бицикл будем называть параболическим.

Введём для бицикла с сайтами точка-точка местную систему прямоугольных декартовых координат, в которой начало координат расположено посередине между сайтами-точками, а ось ординат проходит через сайты-точки. Центры пустых кругов этого би-

цикла лежат на оси абсцисс. Пусть q – расстояние между сайтами. Тогда радиус пустого круга с центром в точке $(x, 0)$ определяется как $\rho = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + x^2}$. Это уравнение в системе координат (x, ρ) описывают гиперболу, поэтому бицикл такого типа будем называть гиперболическим.

Мы хотим получить в явном виде формулы для вычисления медиальной ширины $\mathcal{F}_{lin}(z)$, $\mathcal{F}_{par}(z)$, $\mathcal{F}_{hyp}(z)$ для всех трёх типов бициклов в виде зависимости от параметра ширины z . При этом бицикл задаётся только лишь радиусами своих концевых кругов r и R и расстоянием между центрами этих кругов l .

Медиальная ширина линейного бицикла. На рис. 9 представлен линейный бицикл и связанные с ним точки.

AB – ось бицикла, A, B – центры концевых кругов,
 A_1B_1, A_2B_2 – проекции оси бицикла на сайты-сегменты.

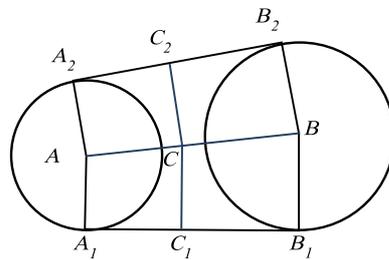


Рис. 9. Линейный бицикл.

Лемма 3. Медиальная ширина линейного бицикла описывается уравнением

$$\mathcal{F}_{lin}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < r \\ az^2 + b & \text{при } r \leq z \leq R \\ t(R+r) & \text{при } z > R \end{cases} \quad (1)$$

где

$$a = \begin{cases} 0 & \text{при } r = R \\ \frac{t}{R-r} & \text{при } r < R \end{cases} \quad (2)$$

$$b = \begin{cases} 2lr & \text{при } r = R \\ -\frac{tr^2}{R-r} & \text{при } r < R \end{cases} \quad (3)$$

$$t = \sqrt{l^2 - (R-r)^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $r < R$. Если $z \in [r, R]$, то на оси бицикла найдётся точка C , являющаяся центром пустого круга с радиусом z . Пусть C_1 и C_2 проекции C на сайты-сегменты. Тогда область ширины z есть многоугольник $A_1AA_2C_2CC_1$ и значение $\mathcal{F}_{lin}(z)$ равно площади $\mu(A_1AA_2C_2CC_1)$. А эта площадь складывается из суммы площадей одинаковых трапеций $\mu(A_1ACC_1)$ и $\mu(AA_2C_2C)$.

Площадь трапеции

$$\mu(A_1ACC_1) = \frac{(AA_1 + CC_1) \cdot A_1C_1}{2}.$$

Из пропорции $\frac{A_1C_1}{CC_1-AA_1} = \frac{A_1B_1}{BB_1-AA_1}$ получаем

$$A_1C_1 = \frac{A_1B_1}{BB_1-AA_1} \cdot (CC_1-AA_1).$$

Поскольку $AA_1 = r$, $CC_1 = x$, $A_1B = t$, имеем

$$\mu(A_1ACC_1) = \frac{r+z}{2} \cdot \frac{t \cdot (z-r)}{(R-r)} = \frac{t}{2 \cdot (R-r)} \cdot (z^2 - r^2).$$

Отсюда

$$\mathcal{F}_{lin}(x) = 2 \cdot \mu(A_1ACC_1) = \frac{t}{(R-r)} \cdot z^2 - \frac{t \cdot r^2}{(R-r)},$$

что даёт значения коэффициентов в (2) и (3) при условии $r < R$.

При $z < r$ очевидно, что $\mathcal{F}_{lin}(z) = 0$, а в случае $z > R$ получаем

$$\mathcal{F}_{lin}(z) = \mathcal{F}_{lin}(R) = \frac{t}{(R-r)} \cdot (R^2 - r^2) = t \cdot (R+r).$$

Теперь рассмотрим случай $r = R$, когда концевые круги бицикла имеют одинаковый радиус. В этом случае функция медиальной ширины имеет скачок в точке z . Величина скачка определяется площадью многоугольника $A_1AA_2C_2CC_1$, который в данном случае вырождается в прямоугольник $A_1A_2C_2C_1$ со сторонами $A_1C_1 = l$ и $A_1A_2 = 2r = R+r$. Поэтому

$$\mathcal{F}_{lin}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < r \\ 2tr & \text{при } z \geq r \end{cases}$$

что доказывает формулы (1)–(3) при $r = R$. ■

Медиальная ширина параболического бицикла. На рис. 10 представлен параболический бицикл.

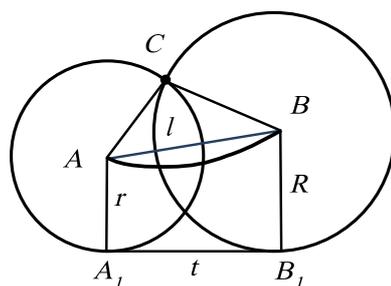


Рис. 10. Параболический бицикл.

AB – отрезок параболы – ось бицикла, A, B – центры концевых кругов,

A_1, B_1 – проекции оси бицикла на сайт-сегмент,

C – сайт-точка параболического бицикла,

r, R – радиусы концевых кругов бицикла, $r \leq R$,

l – расстояние между их центрами,

$t = \sqrt{l^2 - (R-r)^2}$ – длина проекции оси бицикла на директрису параболы.

Ось бицикла представляет собой отрезок параболы. При этом вершина параболы может лежать как на оси бицикла или вне её. Если вершина параболы лежит на оси бицикла, особо выделим случай, когда она совпадает с концевой точкой оси. В этом случае центр меньшего концевой круга совпадает с вершиной параболы и находится в макушке параболы. Такой бицикл будем называть корневым. Положение вершины параболы относительно оси параболического бицикла определяется следующим условием.

Лемма 4. Если $t \geq 2 \cdot \sqrt{r \cdot (R - r)}$, то вершина параболы лежит на оси бицикла, если $t < 2 \cdot \sqrt{r \cdot (R - r)}$, то вне оси.

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда бицикл является корневым и макушка параболы совпадает с центром его концевой круга (рис. 11).

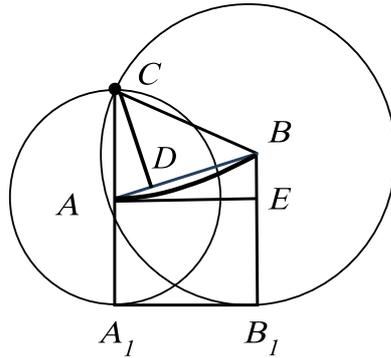


Рис. 11. Корневой параболический бицикл (к леммам 4 и 6).

Точка D – проекция точки C на AB , точка E – проекция точки A на BB_1 . В треугольнике $\triangle ABC$ $AB = l$, $AC = r$, $BC = R$. В треугольнике $\triangle ACD$ $DC^2 = AC^2 - AD^2$, в треугольнике $\triangle BCD$ $DC^2 = BC^2 - BD^2$. Следовательно,

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2. \quad (4)$$

Пусть длина $AD = y$. Тогда из (4) следует

$$\begin{aligned} r^2 - y^2 &= R^2 - (l - y)^2 \text{ и} \\ 2ly &= l^2 - R^2 + r^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Треугольники $\triangle ABE$ и $\triangle ACD$ подобны, поэтому $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BE}$. Отсюда $\frac{r}{y} = \frac{l}{R-r}$ и $y = \frac{r(R-r)}{l}$. Подставляя это значение y в (5), получаем

$$\begin{aligned} 2 \cdot r \cdot (R - r) &= l^2 - R^2 + r^2 \\ 2rR - 2r^2 - l^2 + R^2 - r^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляем также $l^2 = t^2 + (R - r)^2$ в (6):

$$\begin{aligned} 2rR - 3r^2 - t^2 - (R - r)^2 + R^2 &= 0 \\ 4rR - 4r^2 - t^2 &= 0 \\ t^2 &= 4r(R - r) \end{aligned}$$

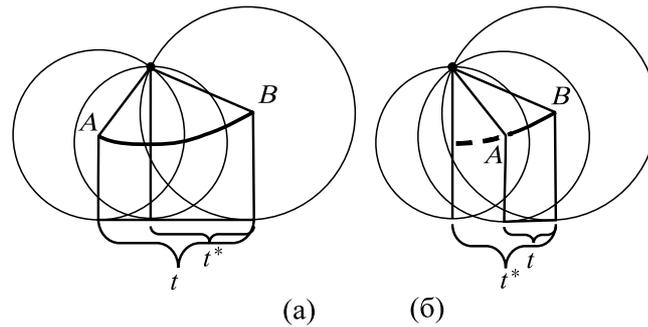


Рис. 12. (а) вершина параболы лежит на оси бицикла, (б) вершина вне оси бицикла.

$$t^* = 2\sqrt{r(R - r)}. \tag{7}$$

Формула (7) описывает длину проекции оси бицикла для рассматриваемого частного случая, когда макушка параболы совпадает с центром концевой окружности бицикла. Рассмотрим теперь общий случай, когда такого совпадения нет.

Если вершина параболы лежит на оси бицикла, то очевидно, имеет место соотношение $t > t^*$, а если вне оси, то $t < t^*$. Это следует из следующих геометрических соображений. В случае, когда вершина лежит на оси бицикла (рис. 12а), можно сдвинуть меньший круг *A* по направлению к большему и найти такое положение меньшего круга, при котором бицикл превращается в корневой (рис. 11). В этом случае $t > t^*$. Если же вершина параболы лежит вне оси (рис. 12б), то сдвиг меньшего круга *A* осуществляем в направлении от большего круга *B*, и тогда $t < t^*$. Это и доказывает утверждение леммы. Заметим, что в случае, когда размеры концевых кругов одинаковы, вершина параболы всегда лежит внутри оси бицикла. ■

Выберем систему декартовых координат для параболического ребра, чтобы вершина параболы имела координаты $(0, 0)$, фокус параболы (сайт-точка) с координатами $C(0, \frac{p}{2})$, а директриса параболы – прямая $y = -\frac{p}{2}$ (ей принадлежит сайт-сегмент).

В этой системе координат уравнение параболы имеет вид $y = \frac{1}{2p}x^2$.

Параметр параболы p для параболического бицикла определяется на основе следующей леммы.

Лемма 5. *Параметр параболы оси параболического бицикла есть*

$$p = \frac{t^2}{2l^2} \left(R + r + \sqrt{(R + r)^2 - l^2} \right).$$

Доказательство. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ координаты центров меньшего и большего концевых кругов бицикла. Поскольку центры концевых кругов лежат на параболе, координаты связаны уравнением параболы, т.е. $y_1 = \frac{1}{2p}x_1^2$ и $y_2 = \frac{1}{2p}x_2^2$. К тому же эти точки равноудалены от сайта-точки *C* и сайта-сегмента A_1B_1 , поэтому $y_1 = r - \frac{p}{2}$ и $y_2 = R - \frac{p}{2}$. Отсюда имеем

$$\frac{1}{2p}x_1^2 = r - \frac{p}{2}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2p}x_2^2 = R - \frac{p}{2}. \tag{9}$$

Вычитая (8) из (9), получаем $x_2^2 - x_1^2 = 2p(R - r)$ и, поскольку $x_2 = t + x_1$, то

$$t \cdot (2x_1 + t) = 2p \cdot (R - r).$$

Отсюда $x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2p(R-r)}{t} - t \right)$.

Подставляем это выражение в уравнение (8) и получаем уравнение для определения p :

$$\left(\frac{(R-r)^2}{t^2} + 1 \right) \cdot p^2 - (R+r) \cdot p + \frac{1}{4}t^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня

$$p = \frac{t^2}{2} \cdot \frac{(R+r) \pm \sqrt{4Rr - t^2}}{(R-r)^2 + t^2}.$$

Подставляем $t^2 = l^2 - (R-r)^2$, тогда эта формула упрощается

$$p = \frac{t^2}{2 \cdot l^2} \left(R+r \pm \sqrt{(R+r)^2 - l^2} \right). \quad (10)$$

Два корня этого уравнения соответствуют двум точкам пересечения концевых окружностей бицикла. Одна из этих точек совпадает с сайтом-точкой бицикла, а другая лежит внутри бицикла. Очевидно, что сайт-точка соответствует большему значению параметра из (10). Поэтому из двух корней (10) следует выбрать большее значение

$$p = \frac{t^2}{2 \cdot l^2} \left(R+r + \sqrt{(R+r)^2 - l^2} \right).$$

■

Теперь на основе полученного выражения для параметра параболического бицикла появляется возможность вычислить его медиальную ширину.

Рассмотрим корневой бицикл, у которого ось есть сегмент параболы с параметром p . Тогда радиус меньшего концевого круга равен $\frac{p}{2}$. Пусть радиус большего концевого круга равен z . Нас интересует площадь собственной области этого бицикла.

Лемма 6. *Площадь собственной области параболического корневого бицикла с параметром p и радиусом концевого круга z равна*

$$\Phi(z) = (z+p) \sqrt{\frac{p}{2} \left(z - \frac{p}{2} \right)}.$$

Доказательство. Пусть больший круг корневого бицикла имеет центр в точке $B(x, y)$ и радиус z (рис. 11). Собственная область бицикла имеет форму трапеции A_1CBV_1 . Площадь этой трапеции $\Phi(z) = \frac{1}{2}(A_1C + BV_1) \cdot A_1V_1$.

Поскольку $A_1C = p$, $BV_1 = z$, $A_1V_1 = x$, получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}(p+z) \cdot x. \quad (11)$$

Из уравнения параболы $y = \frac{1}{2p}x^2$ и условия $CB^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = z^2$ имеем

$$x^2 + \left(\frac{1}{2p}x^2 - \frac{p}{2} \right)^2 = z^2$$

Преобразуя левую часть этого уравнения, получаем $\left(\frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2} \right)^2 = z^2$.

Отсюда $\frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2} = z$ и

$$x = \sqrt{2pz - p^2} = \sqrt{p(2z - p)}.$$

Подставляя в (11), получаем искомую формулу

$$\Phi(z) = (z + p)\sqrt{\frac{p}{2}\left(z - \frac{p}{2}\right)}.$$

■

Следствие 1. *Функция медиальной ширины корневого параболического бицикла с параметром p и концевым кругом радиуса R есть*

$$\Phi(z, p, R) \begin{cases} 0 & \text{если } z \leq \frac{p}{2} \\ \varphi(z) & \text{если } \frac{p}{2} < z \leq R. \\ \varphi(R) & \text{если } z > R \end{cases}$$

Функцию медиальной ширины любого (не корневого) параболического бицикла можно теперь вычислить на основе площадей корневых бициклов.

Лемма 7. *Медиальная ширина параболического бицикла с радиусами концевых кругов r, R и параметром параболы p имеет следующий вид:*

При положении вершины параболы на оси

$$\mathcal{F}_{par}(z) = \Phi(z, p, r) + \Phi(z, p, R)$$

При положении вершины параболы вне оси

$$\mathcal{F}_{par}(z) = \Phi(z, p, R) - \Phi(z, p, r)$$

Доказательство. Бицикл с концевыми кругами (r, R) можно представить как композицию двух корневых бициклов с кругами $(\frac{p}{2}, r)$ и $(\frac{p}{2}, R)$ (рис. 13). Если вершина параболы лежит на оси бицикла, то собственная область бицикла есть объединение собственных областей этих корневых бициклов. А если вершина параболы лежит вне оси, то собственная область есть замыкание разности собственных областей корневых бициклов (рис. 13). В соответствии с этим, функция медиальной ширины этого бицикла складывается как сумма или разность функций медиальной ширины корневых бициклов. ■

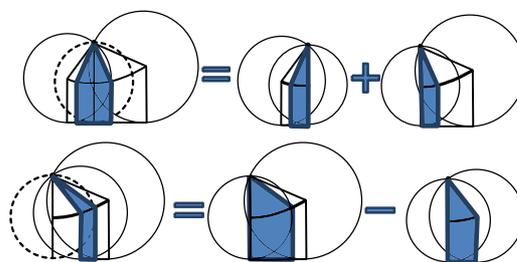


Рис. 13. Медиальная ширина параболического бицикла (Лемма 7).

Таким образом, леммы 4-7 дают формулы для вычисления медиальной ширины параболического бицикла по параметрам r, R, l . Сначала нужно определить положение вершины параболы относительно оси бицикла (лемма 4), затем найти параметр параболы оси

(лемма 5), и после этого можно вычислить значение функции и медиальной ширины в любой точке (лемма 6, 7).

Медиальная ширина гиперболического бицикла. На рис. 14 представлен гиперболический бицикл. Здесь отрезок AB – это ось бицикла, r, R ($r \leq R$) – радиусы концевых кругов с центрами в точках A и B , l – расстояние между центрами концевых кругов, C, D – образующие сайты-точки бицикла. Точку пересечения прямой CD с прямой AB будем называть центром гиперболического бицикла.

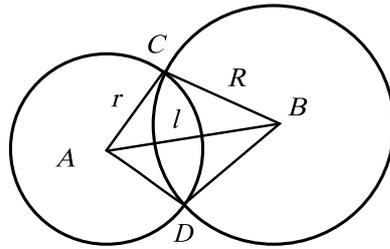


Рис. 14. Гиперболический бицикл.

В зависимости от соотношения величин r, R, l точки A и B могут находиться по одну сторону от прямой CD или по разные стороны от неё. В первом случае центр лежит вне оси бицикла, а во втором – на оси. Положение центра в гиперболическом бицикле определяется следующим условием.

Лемма 8. Если $l^2 + r^2 \geq R^2$, то центр лежит на оси бицикла, а если $l^2 + r^2 < R^2$, то вне оси.

Доказательство. Пусть E – центр бицикла (точка пересечения прямых AB и CD). Если E совпадает с центром концевой окружности A , т.е. $A = E$, то $BE^2 + CE^2 = BC^2$ или $l^2 + r^2 = R^2$.

Если центр лежит внутри оси бицикла (рис. 15), т.е. точка E находится внутри отрезка AB , то $AC^2 + AB^2 > CE^2 + BE^2 = BC^2$. Поскольку при этом $AC = r, AB = l, BC = R$, получаем $l^2 + r^2 > R^2$. Если же центр E лежит вне оси бицикла, то это значит что точка A лежит внутри отрезка BE (на рисунке это положение обозначено точкой A'). Тогда имеет место $A'C^2 + A'B^2 < CE^2 + BE^2 = BC^2$. Поскольку в этом случае $A'C = r, A'B = l, BC = R$, получаем $l^2 + r^2 < R^2$. ■

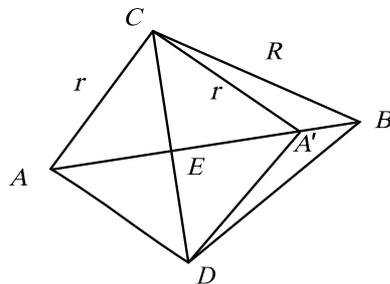


Рис. 15. Определение положения вершины гиперболического бицикла.

Будем называть параметром гиперболического бицикла расстояние q между его сайтами-точками.

Лемма 9. Параметр гиперболического бицикла с радиусами концевых кругов r, R и длиной оси l равен $q = \frac{1}{l} \sqrt{[(l + R)^2 - R^2] \cdot [R^2 - (l - r)^2]}$.

Доказательство. Параметр q равен длине отрезка CD на рис. 15. Тогда

$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}}$$

$$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{R^2 - \frac{q^2}{4}}$$

В случае, когда проекция сайтов-точек лежит на оси бицикла, имеем $AE + BE = l$, т.е.

$$\sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{q^2}{4}} = l.$$

Простыми преобразованиями получаем

$$\begin{aligned} l - \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}} &= \sqrt{R^2 - \frac{q^2}{4}} \\ l^2 + \left(r^2 - \frac{q^2}{4}\right) - 2l \cdot \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}} &= R^2 - \frac{q^2}{4} \\ \frac{l^2 + r^2 - R^2}{2l} &= \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}} \\ \left(\frac{l^2 + r^2 - R^2}{2l}\right)^2 &= r^2 - \frac{q^2}{4} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} q^2 &= 4 \left[r^2 - \left(\frac{l^2 + r^2 - R^2}{2l} \right)^2 \right] = \frac{1}{l^2} [4l^2 r^2 - (l^2 + r^2 - R^2)^2] = \\ &= \frac{1}{l^2} (2lr + l^2 + r^2 - R^2)(2lr - l^2 - r^2 + R^2) = \frac{1}{l^2} [(l + R)^2 - R^2][-(l - R)^2 + R^2]. \end{aligned}$$

Отсюда и следует искомая формула

$$q = \frac{1}{l} \sqrt{[(l + R)^2 - R^2] \cdot [R^2 - (l - R)^2]}. \quad (13)$$

В случае, когда проекция сайтов лежит вне оси бицикла, получаем $BE - AE = l$, т.е.

$$\sqrt{R^2 - \frac{q^2}{4}} - \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}} = l.$$

В этом случае выполняем аналогичные преобразования

$$\begin{aligned} l + \sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}} &= \sqrt{R^2 - \frac{q^2}{4}} \\ l^2 + r^2 - \frac{q^2}{4} + 2l\sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}} &= R^2 - \frac{q^2}{4} \\ 2l\sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4}} &= R^2 - r^2 - l^2 \end{aligned}$$

$$r^2 - \frac{q^2}{4} = \left(\frac{R^2 - r^2 - l^2}{2l} \right). \quad (14)$$

Уравнение (14) преобразуется точно так же, как и уравнение (12). Из него получаем такое же выражение для параметра q , что и в (13).

Таким образом, формула из утверждения леммы справедлива для обоих случаев. ■

По аналогии с разобранным ранее случаем параболического бицикла назовём гиперболический бицикл корневым, если центр его концевой окружности совпадает с вершиной бицикла.

Лемма 10. Площадь собственной области гиперболического корневого бицикла с параметром q и радиусом концевой окружности z равна

$$\Psi(z) = \frac{q}{2} \sqrt{z^2 - \frac{q^2}{4}}.$$

Доказательство. Собственная область корневого гиперболического бицикла представляет собой треугольник $\triangle BCD$, площадь которого равна $S = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB$ (рис. 16). Из $CD = q$ и $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}$ получаем

$$\Psi(z) = S = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \sqrt{z^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}.$$

■

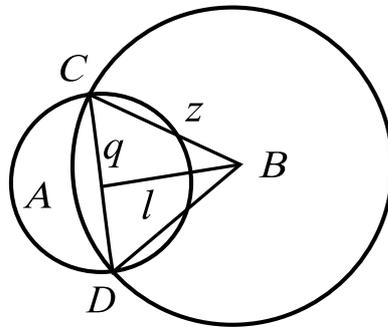


Рис. 16. Определение площади собственной области корневого гиперболического бицикла (к лемме 10).

Следствие 2. Функция медиальной ширины корневого гиперболического бицикла с параметром q и концевым кругом радиуса R есть

$$\Psi(z, p, R) \begin{cases} 0 & \text{если } z \leq \frac{p}{2} \\ \psi(z) & \text{если } \frac{p}{2} < z \leq R. \\ \psi(R) & \text{если } z > R \end{cases}$$

Вычисление медиальной ширины гиперболического бицикла осуществляется через площади собственных областей двух корневых гиперболических бициклов, построенных на его основе.

Лемма 11. Медиальная ширина гиперболического бицикла с радиусами концевых кругов r, R и параметром q имеет следующий вид:

При положении центра на оси бицикла

$$\mathcal{F}_{hyp}(z) = \Psi(z, q, r) + \Psi(z, q, R)$$

При положении центра вне оси бицикла

$$\mathcal{F}_{hyp}(z) = \Psi(z, q, R) - \Psi(z, q, r)$$

Доказательство. Доказывается аналогично лемме 7. Рассматриваем два корневых гиперболических бицикла, у которых собственные области образуют собственную область исходного бицикла (рис. 17). Корневые бициклы имеют общий концевой круг, центром которого является центр бицикла, а радиус равен $\frac{q}{2}$. Если центр принадлежит оси исходного бицикла, то площадь собственной области бицикла равна сумме площадей собственных областей его корневых бициклов. А если центр лежит вне оси, то площадь собственной области бицикла равна разности площадей собственных областей корневых бициклов. В соответствии с этим, функция медиальной ширины этого бицикла складывается как сумма или разность функций корневых бициклов. ■

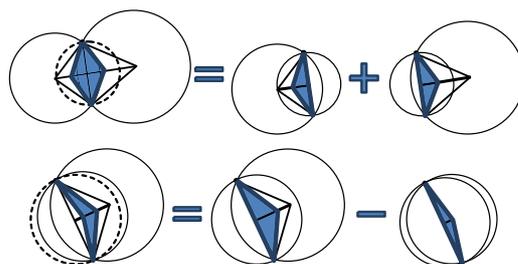


Рис. 17. Медиальная ширина гиперболического бицикла (Лемма 11).

Медиальная ширина концевых секторов бицикла. Для вычисления функции медиальной ширины циркулярной фигуры необходимо определить площади секторов концевых кругов бициклов, которые не покрываются собственными областями этих бициклов.

Концевой круг бицикла разбивается на две части, представляющие собой сектора этого круга. Эти сектора соответствуют двум дугам окружности концевой круга - внутренней и внешней. Внутренняя дуга покрывается другими кругами бицикла, а внешняя дуга образует границу бицикла.

С каждой вершиной скелета $v \in V$ связано несколько бициклов, соответствующих инцидентным рёбрам этой вершины $e_1, e_2, \dots, e_k, k \geq 1$. Концевые круги этих бициклов с центром в точке v совпадают. Внутренние сектора этих бициклов не перекрываются, поэтому если угловые размеры внутренних секторов бициклов равны $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq 2\pi$. Если в вершине v сохранились все рёбра, которые входят в скелет многоугольной фигуры, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 2\pi$. А в тех вершинах циркулярной фигуры, в которых в процессе стрижки были отсечены какие-то рёбра скелета, сумма внутренних углов меньше, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k < 2\pi$. Получается, что угловой размер секторов вершины v , не покрытых внутренними секторами бициклов, равен

$$\xi(v) = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k). \tag{15}$$

Если r_v - радиус пустого круга вершины v , то площадь внешних секторов вершины v есть

$$\theta(v) = \frac{1}{2} \xi(v) \cdot (r_v)^2.$$

Для вычисления $\xi(v)$ для всех вершин скелета $v \in V$, нужно вычислить размеры внутренних секторов концевых кругов бициклов, образующих циркулярную фигуру.

Угловые размеры внутренних секторов бициклов определяются в зависимости от их типа (линейный, параболический или гиперболический), размеров концевых кругов $r, R, (r \leq R)$ и расстояния l между центрами этих кругов.

Лемма 12. *Внутренняя дуга концевого круга линейного бицикла имеет размер $\alpha = \pi + 2 \cdot \arcsin \frac{R-r}{l}$ для меньшего круга и $\alpha = \pi - 2 \cdot \arcsin \frac{R-r}{l}$ для большего круга.*

Доказательство. Внутренняя дуга (рис. 18) меньшего концевого круга A измеряется углом

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle A_1 A A_2 = \angle A_1 A C_1 + \angle C_1 A C_2 + \angle C_2 A A_2 = \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \angle C_1 A B + \frac{\pi}{2} = \pi + 2 \cdot \arcsin \frac{B C_2}{A B}. \end{aligned}$$

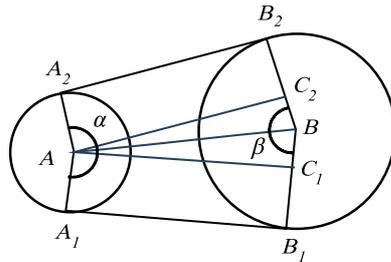


Рис. 18. Внутренняя дуга линейного бицикла (Лемма 12).

Поскольку $B C_2 = R - r$, а $A B = l$, получается формула для меньшего круга $\alpha = \pi + 2 \cdot \arcsin \frac{R-r}{l}$.

Размер внутренней дуги большего концевого круга получается из соотношения

$$\beta = 2\pi - \alpha = \pi - 2 \cdot \arcsin \frac{R-r}{l}.$$

■

Лемма 13. *Внутренняя дуга большего концевого круга параболического бицикла с параметром p равна $\alpha = \arccos \left(1 - \frac{p}{R}\right)$, а внутренняя дуга меньшего круга равна $\beta = \arccos \left(1 - \frac{p}{r}\right)$ в случае, когда вершина параболы лежит на оси бицикла, и $\beta = 2\pi - \arccos \left(1 - \frac{p}{r}\right)$, если вне оси.*

Доказательство. В полярной системе координат (ρ, φ) с центром в вершине параболы и осью, совпадающей с осью ординат, уравнение параболы имеет вид $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$. В точке параболы, являющейся центром большего круга $\rho = R$, а в центре меньшего круга $\rho = r$. Внутренние дуги концевых кругов бицикла имеют размеры в интервале от 0 до 2π . Уравнение $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ даёт в этом интервале два решения $\varphi_1 = \arccos \left(1 - \frac{p}{\rho}\right)$ и $\varphi_2 = 2\pi - \arccos \left(1 - \frac{p}{\rho}\right)$. Одно из этих значений меньше, а другое больше π .

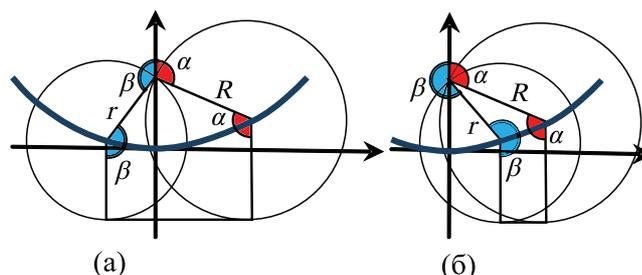


Рис. 19. Внутренняя дуга параболического бицикла (Лемма 13).

Из геометрических соображений ясно, что внутренняя дуга большего круга всегда меньше π , поэтому её величина есть $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{p}{R}\right)$. А для меньшего круга возможны два варианта решения. Если вершина параболы лежит внутри оси бицикла (рис. 19а), то внутренняя дуга меньшего концевой круга тоже меньше π , и поэтому $\beta = \arccos\left(1 - \frac{p}{r}\right)$. А в случае, когда вершина параболы лежит вне оси бицикла (рис. 19б), величина этой дуги больше π . Тогда $\beta = 2\pi - \arccos\left(1 - \frac{p}{r}\right)$. ■

Лемма 14. Внутренняя дуга большего концевой круга гиперболического бицикла с параметром q имеет размер $\alpha = \arcsin\left(\frac{q}{2R}\right)$, а внутренняя дуга меньшего круга имеет размер $\beta = \arcsin\left(\frac{q}{2r}\right)$ в случае, когда вершина бицикла лежит на оси бицикла и $\beta = 2\pi - \arcsin\left(\frac{q}{2r}\right)$, если вне оси.

Доказательство. Очевидно следует из приведенного рис. 20. ■

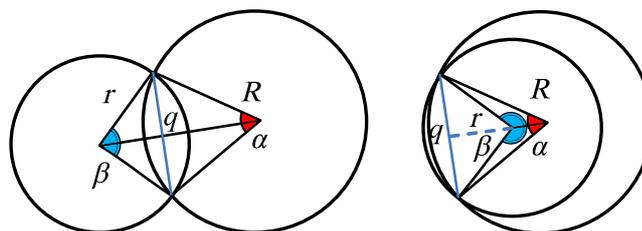


Рис. 20. Внутренние дуги гиперболического бицикла (Лемма 14).

Алгоритм вычисления медиальной ширины фигуры

Входом алгоритма служит медиальное представление многоугольной или циркулярной фигуры, имеющее формат взвешенного графа.

$S = \langle V, E \rangle$ – скелет фигуры,

V – множество вершин графа,

E – множество рёбер графа,

$e = (r_e, R_e, l_e, k_e)$ – ребро графа,

r_e – радиус меньшего круга ребра,

R_e – радиус большего круга ребра,

l_e – расстояние между центрами кругов ребра,

k_e – тип ребра (*lin* – линейное, *par* – параболическое, *hyp* – гиперболическое).

$v = (r_v, c_v)$ – вершина графа,

r_v – радиус круга вершины,

c_v – открытая дуга вершины (вычисляется в ходе работы алгоритма).

Результат работы алгоритма:

$\{F_0, F_1, \dots, F_N\}$ – массив значений функции распределения медиальной ширины фигуры $F_i = \mathcal{F}(r_i)$ в некотором заранее определённом наборе значений аргумента $\{r_0, r_1, \dots, r_N\}$. В качестве такого набора значений аргумента может быть использована, например, последовательность целых чисел $\{0, 1, \dots, N\}$, т.е. $r_i = i$.

// Функция вычисления площади собственной области параболического корневого бицикла с параметром p и радиусом концевой круга z

Функция $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = (z + p) \sqrt{\frac{p}{2} \left(z - \frac{p}{2} \right)}$$

// Функция вычисления площади собственной области гиперболического корневого бицикла с параметром q и радиусом концевой круга z

Функция $\Psi(z)$

$$\Psi(z) = \frac{q}{2} \sqrt{z^2 - \frac{q^2}{4}}$$

// Функция вычисления медиальной ширины линейного бицикла

Функция $\mathcal{F}_{lin}(x)$

$$\mathcal{F}_{lin}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < r \\ ax^2 + b & \text{при } r \leq x \leq R \\ t(R + r) & \text{при } x > R \end{cases}$$

// Функция вычисления медиальной ширины параболического бицикла

Функция $\mathcal{F}_{par}(z)$

если *TopPos* то

$$\mathcal{F}_{par}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq \frac{p}{2} \\ 2 \cdot \Phi(z) & \text{при } \frac{p}{2} < z \leq r \\ \Phi(r) + \Phi(z) & \text{при } r < z \leq R \\ \Phi(r) + \Phi(R) & \text{при } z > R \end{cases}$$

иначе

$$\mathcal{F}_{par}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq \frac{p}{2} \\ \Phi(z) - \Phi(r) & \text{при } r < z \leq R \\ \Phi(R) - \Phi(r) & \text{при } z > R \end{cases}$$

// Функция вычисления медиальной ширины гиперболического бицикла

Функция $\mathcal{F}_{hyp}(z)$

если *TopPos* то

$$\mathcal{F}_{hyp}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq \frac{q}{2} \\ 2 \cdot \Psi(z) & \text{при } \frac{q}{2} < z \leq r \\ \Psi(r) + \Psi(z) & \text{при } r < z \leq R \\ \Psi(r) + \Psi(R) & \text{при } z > R \end{cases}$$

иначе

$$\mathcal{F}_{hyp}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq r \\ \Psi(z) - \Psi(r) & \text{при } r < z \leq R \\ \Psi(R) - \Psi(r) & \text{при } z > R \end{cases}$$

// Начало программы

для $i \in \{0, 1, \dots, N\}$

$F_i \leftarrow 0$

для всех $e \in E$

```

// предобработка, подготовка параметров для всех бициклов
если  $k_e = lin$  то
     $t = \sqrt{l_e^2 - (R_e - r_e)^2}$ 
    если  $r_e = R_e$  то
         $a \leftarrow 0$ 
         $b \leftarrow 2l_e r_e$ 
    иначе
         $a \leftarrow \frac{t}{R_e - r_e}$ 
         $b \leftarrow -\frac{t r_e^2}{R_e - r_e}$ 
     $i_{min} \leftarrow \max \{i | r_i \leq r_e\}$ 
     $i_{max} \leftarrow \min \{i | r_i \geq R_e\}$ 
иначе если  $k_e = par$  то
     $t = \sqrt{l_e^2 - (R_e - r_e)^2}$ 
     $TopPos \leftarrow (t \geq 2\sqrt{r \cdot (R - r)})$  // положение вершины параболы относительно оси параболы бицикла: TRUE – на оси, FALSE – вне оси
     $p = \frac{t^2}{2l^2} (R + r + \sqrt{(R + r)^2 - l^2})$  // параметр параболического бицикла
    если  $TopPos$  то
         $i_{min} \leftarrow \max \{i | r_i \leq \frac{p}{2}\}$ 
    иначе
         $i_{min} \leftarrow \max \{i | r_i \leq r_e\}$ 
     $i_{max} \leftarrow \min \{i | r_i \geq R_e\}$ 
иначе если  $k_e = hyp$  то
     $TopPos \leftarrow (l^2 + r^2 \geq R^2)$  // положение центра гиперболического бицикла: TRUE – на оси, FALSE – вне оси
     $q = \frac{1}{l} \sqrt{[(l + r)^2 - R^2] \cdot [R^2 - (l - r)^2]}$  // параметр гиперболического бицикла
    если  $TopPos$  то
         $i_{min} \leftarrow \max \{i | r_i \leq \frac{q}{2}\}$ 
    иначе
         $i_{min} \leftarrow \max \{i | r_i \leq r_e\}$ 
     $i_{max} \leftarrow \min \{i | r_i \geq R_e\}$ 
// подготовка параметров для концевых секторов
 $v_1 \leftarrow e.v_1$  // Вершина - конец ребра e, соответствующий меньшему кругу бицикла
 $v_2 \leftarrow e.v_2$  // Вершина - конец ребра e, соответствующий большему кругу бицикла
если  $k_e = lin$  то
     $v_{1.c} \leftarrow v_{1.c} + \pi + 2 \cdot \arcsin \frac{R_e - r_e}{l_e}$ 
     $v_{2.c} \leftarrow v_{2.c} + \pi - 2 \cdot \arcsin \frac{R_e - r_e}{l_e}$ 
иначе если  $k_e = par$  то
     $v_{2.c} \leftarrow v_{2.c} + \arccos \left(1 - \frac{p}{R_e}\right)$ 
    если  $TopPos$  то
         $v_{1.c} \leftarrow v_{1.c} + \arccos \left(1 - \frac{p}{r_e}\right)$ 
    иначе
         $v_{1.c} \leftarrow v_{1.c} + 2\pi - \arccos \left(1 - \frac{p}{r_e}\right)$ 
иначе если  $k_e = hyp$  то

```

```

 $v_2.c \leftarrow v_2.c + \arcsin\left(\frac{q}{2R_e}\right)$ 
если TopPos то
     $v_1.c \leftarrow v_1.c + \arcsin\left(\frac{q}{2r_e}\right)$ 
иначе
     $v_1.c \leftarrow v_1.c + 2\pi - \arcsin\left(\frac{q}{2r_e}\right)$ 
// вычисление вклада бицикла в общую функцию медиальной ширины фи-
гуры
для  $i = i_{min} + 1$  до  $i_{max}$ 
     $r \leftarrow r_i$ 
    если  $k_e = lin$  то
         $H_i \leftarrow H_i + \mathcal{F}_{lin}(r_i) - \mathcal{F}_{lin}(r_{i-1})$ 
    иначе если  $k_e = par$  то
         $H_i \leftarrow H_i + \mathcal{F}_{par}(r_i) - \mathcal{F}_{par}(r_{i-1})$ 
    иначе если  $k_e = hyp$  то
         $H_i \leftarrow H_i + \mathcal{F}_{hyp}(r_i) - \mathcal{F}_{hyp}(r_{i-1})$ 
// вычисление вклада концевых секторов в общую функцию медиальной ширины
фигуры
для всех  $v \in V$ 
     $j \leftarrow \min\{i | r_i \geq v.c.v.r\}$ 
     $H_j \leftarrow H_j + (2\pi - v.c) \cdot \frac{(v.r)^2}{2}$ 
// вычисление функции медиальной ширины в заданных значениях аргумента
 $F_0 \leftarrow 0$ 
для  $i = 1$  до  $N$ 
     $F_i \leftarrow F_{i-1} + H_i$ 
// конец алгоритма

```

Реализация и вычислительный эксперимент

Алгоритм реализован в среде Дельфи-Паскаль на базе алгоритма построения непрерывного скелета бинарного изображения. Общая структура алгоритма включает в себя следующие этапы:

- построение аппроксимирующей многоугольной фигуры для бинарного растрового изображения. Аппроксимирующая фигура имеет границу, состоящую из одного или нескольких многоугольников. Многоугольники являются разделяющими многоугольниками минимального периметра. При этом многоугольники задают подразбиение плоскости на связные компоненты, обладающие следующим свойством. Все пиксели растрового изображения, являющиеся внутренними точками одной и той же компоненты, имеют одинаковый цвет. Пиксели, лежащие на границе компоненты, могут иметь разные цвета. Алгоритм построения аппроксимирующей многоугольной фигуры описан в [6];
- построение внутренней части диаграммы Вороного для множества линейных сегментов, составляющих границу аппроксимирующей многоугольной фигуры. Построение осуществляется с помощью алгоритма, описанного в [6];
- построение аппроксимирующей циркулярной фигуры на основе выделения скелетного графа из диаграммы Вороного и его последующей регуляризации;
- вычисление функции медиальной ширины для полученной циркулярной фигуры с помощью алгоритма, описанного выше.

Пример на рис. 21 иллюстрирует описанную схему.

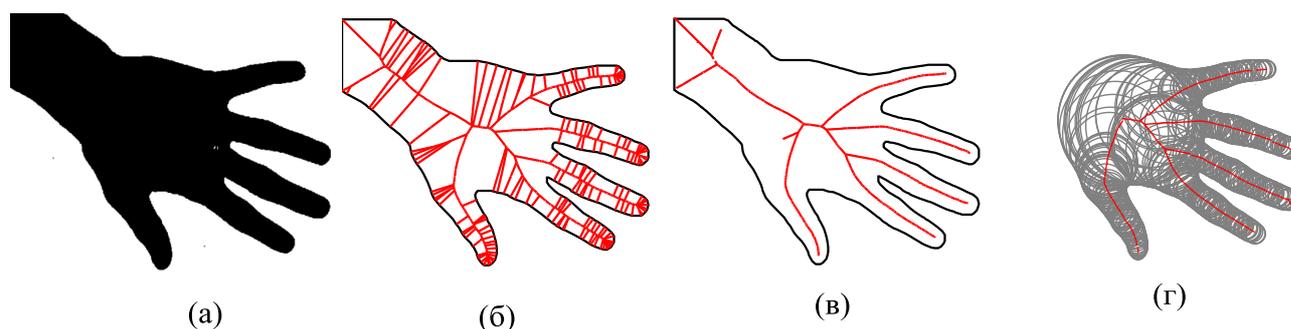


Рис. 21. Аппроксимация изображения циркулярной фигурой.

Исходное бинарное изображение представлено битовой картой 640x480 пикселей (рис 21а). Аппроксимирующая многоугольная фигура имеет вид простого многоугольника с 346 вершинами. Его скелетный граф имеет 689 рёбер (рис. 21б). Простая регуляризация с параметром стрижки 1 оставляет в скелетном графе 435 рёбер (рис. 21в). Полученный в результате стрижки подграф обладает следующим свойством. Объединение всех вписанных в исходную фигуру кругов с центрами на этом подграфе образуют циркулярную фигуру, которая отличается от многоугольной фигуры не более чем на заданную величину ε в метрике Хаусдорфа. В нашем примере $\varepsilon = 1$. Далее семантическая сегментация оставляет в скелетном графе только ту его часть, которая описывает пальцы и пясть. В результате получается граф с 382 рёбрами. Этот граф задаёт циркулярную фигуру, состоящую из 382 бициклов (рис. 21г). Среди них 182 линейных, 152 параболических и 48 гиперболических. Общий вид функции медиальной ширины представлен на диаграмме рис. 22.



Рис. 22. График функции медиальной ширины ладони.

Оценка скорости работы предложенного алгоритма получена на задаче биометрической идентификации личности по геометрии ладони. В качестве меры близости изображений ладоней I_1 и I_2 , имеющих функции медиальной ширины $\mathcal{F}_1(x)$ и $\mathcal{F}_2(x)$, принято расстояние между функциями медиальными ширины изображений в метрике L_1

$$\sigma(I_1, I_2) = \int_0^\infty \left| \lambda_1^2 \cdot \mathcal{F}_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} \cdot x \right) - \lambda_2^2 \cdot \mathcal{F}_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} \cdot x \right) \right| dx. \quad (16)$$



Рис. 23. Фрагмент базы изображений ладоней.

Коэффициенты λ_1 и λ_2 предназначены для нормализации функций медиальной ширины, поскольку изображения ладоней получены при различной дальности съёмки и имеют разный масштаб. Эти коэффициенты вычисляются специальным алгоритмом масштабирования. В эксперименте использованы 160 бинарных изображений ладоней 35 человек (рис. 23). Изображения 640x480 представлены в виде монохромных файлов в формате BMP. Сначала для всех изображений вычисляются медиальные функции ширины. После этого для каждой пары изображений вычисляется расстояние в форме (16). По результатам сравнения строится ROC-кривая, показывающая классификационные возможности данной меры сравнения изображений ладоней (рис. 24).

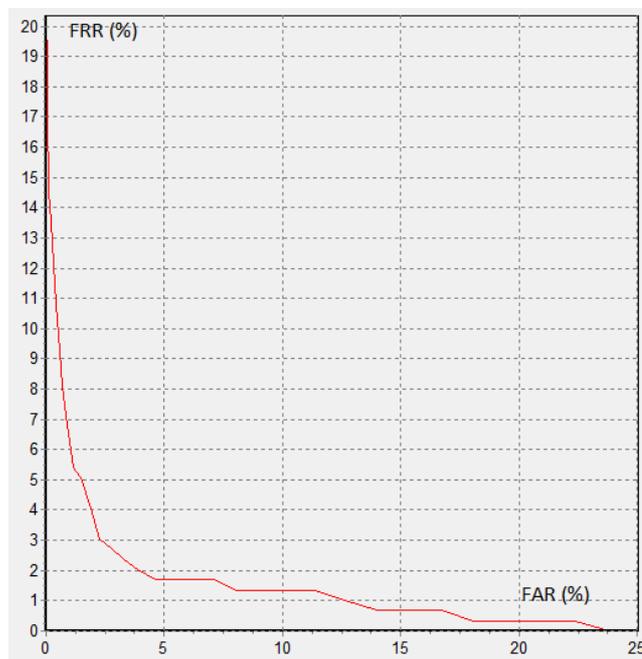


Рис. 24. ROC-кривая сравнения формы ладоней на основании функции медиальной ширины.

В таблице приведены данные о времени вычислений для процессора Intel® Core™ i5-3210M CPU @ 2.50GHz.

Операция	Колич.	Общее время	Время на одну операцию
Вычисление функции медиальной ширины	160 изобр.	2325 мс	14.53 мс
Вычисление парных расстояний	12720 сравн.	3200 мс	0.25 мс

Операция «Вычисление функции медиальной ширины» включает в себя построение аппроксимирующей многоугольной фигуры, вычисление медиального представления, регуляризацию скелета, а также непосредственное вычисление функции медиальной ширины на основе медиального представления.

Заключение

Предложенный метод открывает новые возможности по применению высокоэффективных алгоритмов вычислительной геометрии в анализе и распознавании растровых дискретных изображений. Известные подходы к вычислению дескрипторов для ширины фигур на основе морфологического спектра не подходят для использования в реальном времени работы систем компьютерного зрения, поскольку имеют высокую вычислительную сложность. Предлагаемый переход к непрерывной модели на основе многоугольных фигур, а также высокоэффективный метод вычисления медиальной ширины для таких фигур дают возможность преодолеть этот недостаток, позволяют сравнивать и измерять сходство фигур по их ширине.

Литература

- [1] *Siddiqi K., Pizer S. M. Medial Representations: Mathematics, Algorithms and Applications.* Springer, 2008.
- [2] *Maragos P. Pattern Spectrum and Multiscale Shape Representation // IEEE Tran. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989. Vol. 11, No. 7. P. 701–716.*
- [3] *Визильтер Ю. В., Сидякин С. В. Морфологические спектры // Техническое зрение в системах управления – 2012. Труды научно-технической конференции, Москва: ИКИ РАН, 2012. С. 234–241.*
- [4] *Визильтер Ю. В., Сидякин С. В. Использование морфологических спектров для классификации двумерных фигур и бинарных изображений // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2013. № 7. С. 20–28.*
- [5] *Vizilter Yu., Sidiyakin S., Rubis A., Gorbazevich V. Morphological shape comparison based on skeleton representations // Pattern Recognition and Image Analysis, 2012. Vol. 22, No. 3. P. 412–418.*
- [6] *Местецкий Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений. Фигуры, скелеты, циркуляры. Москва: Физматлит, 2009.*
- [7] *Макарова Е. Ю. Непрерывные алгоритмы морфологического анализа и сравнения листьев растений. Дипломная работа, МГУ, ВМК, 2012.*
- [8] *Held M. Vroni and ArcVroni: Software for and Applications of Voronoi Diagrams in Science and Engineering // Proc. 8th Int. Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD), June 2011. P. 3–12. doi: 10.1109/ISVD.2011.9.*

- [9] *Karavelas M.* A robust and efficient implementation for the segment Voronoi diagram // *Proc. 1st Int. Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD)*, Sept. 2004. P. 51–62.
- [10] *Ramirez-cortes J. M., Gomez-gil P., Sanchez-perez G., Baez-lopez D.* A Feature Extraction Method Based on the Pattern Spectrum for Hand Shape Biometry // *Proc. World Congress on Engineering and Computer Science*, Oct. 2008.

References

- [1] *Siddiqi K., Pizer S. M.* 2008. *Medial Representations: Mathematics, Algorithms and Applications*. Springer.
- [2] *Maragos P.* 1989. Pattern Spectrum and Multiscale Shape Representation. *IEEE Tran. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11(7):701–716.
- [3] *Vizilter Yu. V., Sidyakin S. V.* 2012. Morphological spectra. *Computer vision in control systems 2012. Proceedings of the scientific-technical conference*. Moscow: IKI RAS. 234–241. (in Russ.)
- [4] *Vizilter Yu. V., Sidyakin S. V.* 2013. The classification of two-dimensional figures and binary images using morphological pattern spectra. *Herald of computer and information technologies* 7:20–28. (in Russ.)
- [5] *Vizilter Yu., Sidyakin S., Rubis A., Gorbazevich V.* 2012. Morphological shape comparison based on skeleton representations. *Pattern Recognition and Image Analysis* 22(3):412–418.
- [6] *Mestetskiy L. M.* 2009. *Continuous morphology of binary images: Figures, skeletons and circulars*. Moscow: Fizmatlit. (in Russ.)
- [7] *Makarova E. Yu.* 2012. *Continuous algorithms of morphological analysis and comparison of plant leaves*. Diploma Thesis, CMC MSU. (in Russ.)
- [8] *Held M.* 2011. *Vroni and ArcVroni: Software for and Applications of Voronoi Diagrams in Science and Engineering*. *Proc. 8th Int. Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD)*. June 2011. 3–12. doi: 10.1109/ISVD.2011.9.
- [9] *Karavelas M.* 2004. A robust and efficient implementation for the segment Voronoi diagram. *Proc. 1st Int. Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD)*. Sept. 2004. 51–62.
- [10] *Ramirez-cortes J. M., Gomez-gil P., Sanchez-perez G., Baez-lopez D.* 2008. A Feature Extraction Method Based on the Pattern Spectrum for Hand Shape Biometry. *Proc. World Congress on Engineering and Computer Science*. Oct. 2008.