

## Интеллектуальные возможности гипертрейс-преобразования: конструирование признаков с заданными свойствами\*

*Н. Г. Федотов<sup>1</sup>, А. А. Семов<sup>1</sup>, А. В. Моисеев<sup>2</sup>*

fedotov@pnzgu.ru, matematik\_aleksey@mail.ru, moigus@mail.ru

Россия, г. Пенза <sup>1</sup>Пензенский государственный университет, ул. Красная, 40; <sup>2</sup>Пензенский государственный технологический университет, проезд Байдукова/ул. Гагарина, 1 а/11

В настоящей статье предлагается новый подход к распознаванию трехмерных (3D) объектов, основанный на современных методах стохастической геометрии и функционального анализа. Данный метод обладает рядом преимуществ и возможностями интеллектуального анализа данных. Так, признаки имеют гипертриплетную композиционную структуру, которая способствует не только легкой машинной реализации этого алгоритма, но и конструированию большого числа признаков. Благодаря построению строгой математической модели, аналитик может строить признаки не интуитивно, а аналитически, описывая каждый класс объектов и их особенности (в частности, конструирование геометрических признаков). Трехмерное трейс преобразование позволяет создавать инвариантное описание пространственного объекта, которое является более устойчивым к искажениям и координатным шумам, чем описание, получаемое в результате процедуры нормализации объекта. Возможность регулировать свойства построенных признаков заметно повышает интеллектуальные возможности 3D трейс преобразования, что, несомненно, является его преимуществом. Доказательством разработанной теории и математической модели является множество построенных теоретических примеров гипертриплетных признаков, имеющих описанные определенные свойства. В статье анализируется роль функционалов, входящих в композиционную структуру гипертриплетного признака. Описываются расширенные возможности 3D трейс преобразования, в частности, извлечение в той же технике сканирования информации о пространственном положении и ориентации трехмерного объекта. Приводится описание многих способов интеллектуального анализа 3D изображений. Например, одной из интеллектуальных способностей предлагаемого метода является высокоуровневая предобработка, обработка и постобработка 3D изображения в одной технике сканирования.

**Ключевые слова:** гипертрейс-преобразование; 3D распознавание образов; интеллектуальный анализ 3D изображений; инвариантность и чувствительность признаков; определение параметров пространственного объекта

## Intelligent capabilities hypertrace transform: Constructing features with predetermined properties\*

*N. G. Fedotov<sup>1</sup>, A. A. Syemov<sup>1</sup>, A. V. Moiseev<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Penza State University, Penza, Russia; <sup>2</sup>Penza State Technological University, Penza, Russia

**Background:** In recent decades, the emphasis in the analysis and pattern recognition shifts from two-dimensional (2D) to three-dimensional (3D) images, because 3D design allows to use more information about the object. Three-dimensional modeling gives possibility to see object from different angles, in particular, allows to analyze its spatial form.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-07-00501.

**Methods:** In this article, a new approach to the 3D objects' recognition based on modern methods of stochastic geometry and functional analysis is proposed. This method has many advantages and data mining capabilities. Thus, features have hypertriplet composite structure, which provide not only easy machine implementation of this algorithm, but construction of a large number of features. Due to building a rigorous mathematical model, the analyst can construct analytical and not intuitive features, describing each object class and their features (in particular, constructing geometric features).

**Results:** Three-dimensional trace transform allows to create invariant description of spatial object, which is more resistant to distortion and coordinate noise than the description obtained as a result of the object normalization procedure. Possibility of regulating constructed features' properties significantly increases intellectual capabilities of 3D trace transform that is undoubtedly its advantage. Proof developed theory and the mathematical model is variety constructed theoretical examples of hypertriplet features having described particular properties.

**Concluding Remarks:** In the article, the role of functional included in composite structure of hypertriplet feature is analyzed. Extended possibilities of 3D trace transform, in particular, extracting in the same scanning technique the information about the spatial position and orientation of 3D object, are described. Description of many ways of 3D image mining is proposed. For example, one of the intellectual abilities of the proposed method is a high-level preprocessing, processing, and postprocessing of 3D images in one scanning technique.

**Keywords:** hypertrace transform; 3D pattern recognition; 3D image mining; invariance and sensitiveness features; defining the spatial object parameters

## Введение

В последние десятилетия акцент в анализе и распознавания образов смещается с двумерных (2D) на 3D изображения, так как трехмерное моделирование и конструирование позволяют полнее учитывать информацию об объекте, дает возможность видеть его с разных углов обзора и, в частности, позволяет анализировать его пространственную форму [1].

Интеллектуальная компьютерная обработка как 2D, так и 3D изображений находится пока не на высоком уровне, несмотря на возрастающую потребность в данных методах [2]. Это обусловлено отнюдь не низкой мощностью вычислительных средств, а недостаточно развитыми теоретическими подходами. Самостоятельное принятие решение и искусственный интеллект роботов будет невозможен или крайне неэффективен при слабом уровне машинного зрения. Так, транспортные роботы при плохом качестве машинного зрения не смогут обеспечить надежную ориентацию и движение в пространстве.

С развитием и усложнением технических устройств актуальной становится также задача анализа особенностей 3D объектов, вычисление различных их метрических свойств и признаков. Так, например, для ориентирования роботизированного мобильного комплекса на неизвестной местности актуальной является задача анализа ситуации с помощью бортового вычислителя, исходя из информации, поставляемой системой технического зрения в реальном времени. Необходимо оперативно не только распознавать 3D объекты, но и определять скорости этих объектов и расстояния до них, определять относительно мировой и бортовой систем координат их положение и ориентацию в пространстве и т.п.

В данной статье предлагается новый подход к конструированию признаков 3D изображения, дающие инвариантное описание объекта при любой его пространственной ориентации – гипертрейс-преобразование (или 3D трейс-преобразование), обладающего не только

множеством дополнительных возможностей анализа 3D объектов, но и высокими интеллектуальными способностями.

## Математическая модель гипертрейс-преобразования

Пусть  $F$  — исходная трехмерная модель. Определим плоскость  $B(\eta, r) = \{x | x^T \eta = r\}$  как касательную к сфере с центром в начале координат и с радиусом  $r$  в точке  $(\eta, r)$ , где  $\eta = [\cos \varphi \sin \omega, \sin \varphi \cdot \sin \omega, \cos \omega]$  — единичный вектор в  $R^3$ ,  $r$ ,  $\omega$  и  $\varphi$  — сферические координаты.

Сканирование исходного пространственного объекта  $F$  осуществляется сеткой параллельных плоскостей, определяемой парой углов  $(\omega, \varphi)$  с расстоянием  $\Delta r$  между плоскостями. Взаимное положение 3D объекта  $F$  и каждой сканирующей плоскости  $B(\eta(\omega, \varphi), r)$  характеризуется числом  $G$  по некоторому правилу *HyperT*:  $G = \text{HyperT}(F \cap B(\eta(\omega, \varphi), r))$ . В качестве указанной характеристики могут выступать число пересечений плоскости с исходным объектом, площадь сечения или свойства окрестности такого сечения и т. п. (рис. 1).

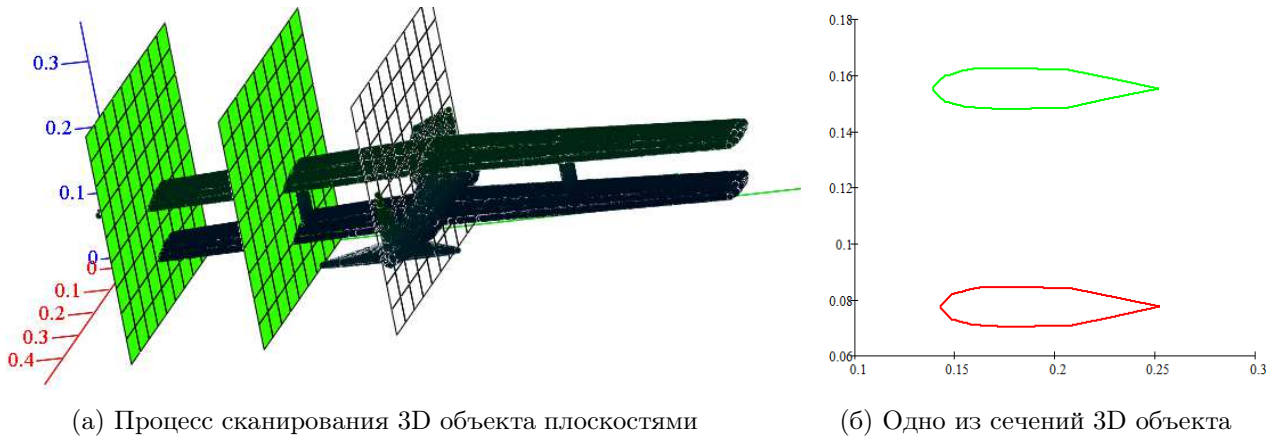
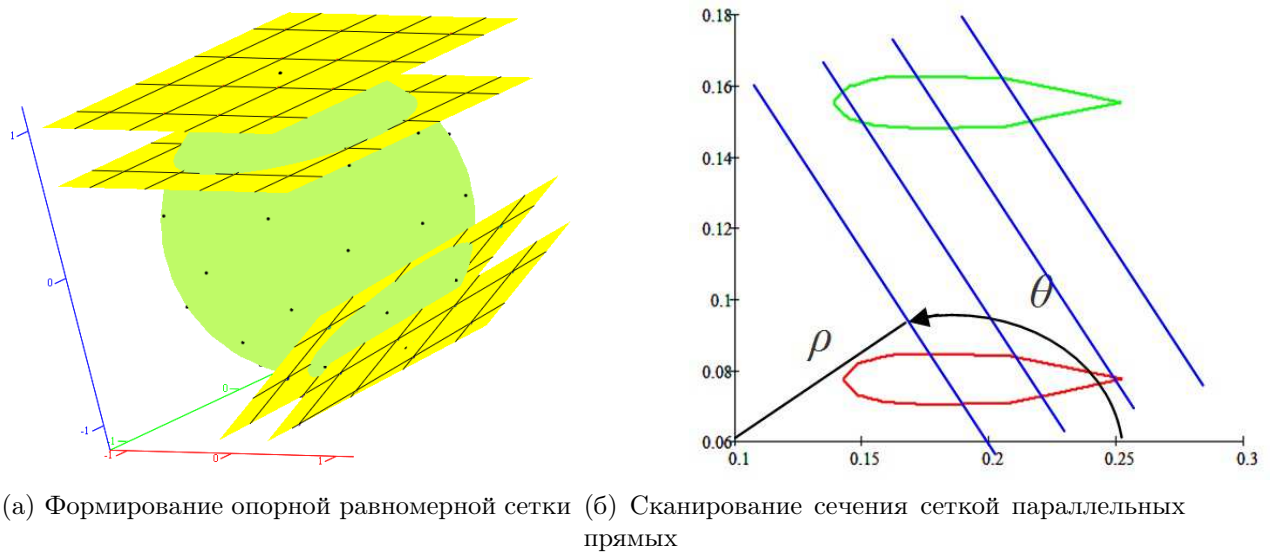


Рис. 1. Особенности сканирования 3D объекта

Затем сканирование производится для новой пары значений углов  $(\omega + \Delta\omega, \varphi + \Delta\varphi)$ , получивших дискретные приращения  $\Delta\varphi$ , сеткой параллельных плоскостей с тем же шагом  $\Delta r$ . К пересечению новой плоскости  $B(\eta(\omega + \Delta\omega, \varphi + \Delta\varphi), r)$  и 3D объекта  $F$  вновь применяется ранее выбранное правило *HyperT*. Важно отметить, что изменять углы важно не произвольным образом [3], а согласно построению опорной сетки, чтобы плотность плоскостей в пространстве была равномерной (рис. 2).

После перебора различных вариантов пар углов  $(\omega, \varphi)$  получаем множество чисел  $G$ , которое формирует гипертрейс-матрицу ЗТМ, у которой ось  $O\omega$  будет направлена горизонтально, ось  $O\varphi$  — вертикально, ось  $Or$  — вглубь. После формирования матрицы ЗТМ с помощью гиперфункционала *HyperP* (например, максимальный элемент строки) обрабатываются ее глубинные строки. В результате данная матрица станет двумерной.

Таким образом, признак 3D изображения получается после обработки строк и столбцов матрицы ЗТМ гиперфункционалами *HyperTheta*, *HyperOmega* и *HyperP*. Получается структура гипертриплетных признаков в виде композиции функционалов — последовательное применение указанных выше гиперфункционалов, каждый из которых сокращает размерность матрицы ЗТМ на единицу [4]:



**Рис. 2.** Формирование гипертрейс-матрицы ЗТМ 3D объекта

$$\text{Res}(F) = \text{Нурег } \Theta \circ \text{Нурег } \Omega \circ \text{Нурег } P \circ \text{Нурег } T(F_{\text{sect}}).$$

Сканирование получаемых в сечение фигур  $F_{\text{sect}}$  осуществляется сеткой параллельных прямых  $l(\rho, \theta)$  с расстоянием  $\Delta\rho$  между линиями, где  $\rho, \theta$  — полярные координаты прямой в плоскости сечения. Взаимное положение изображения  $F_{\text{sect}}$  и каждой сканирующей линии  $l(\rho, \theta)$  характеризуется числом, вычисляемым по некоторому правилу  $T : g = T(F \cap l)$  (рис. 2).

Затем сканирование производится для нового значения угла  $\theta + \Delta\theta$ , получившего дискретное приращение  $\Delta\theta$ , сеткой параллельных прямых в той же плоскости сечения  $F_{\text{sect}}$  и с тем же шагом  $\Delta\rho$ . К пересечению новой прямой  $l(\rho, \theta)$  и сечения  $F_{\text{sect}}$  применяется ранее выбранное правило  $T$ .

Результат вычислений трейс-функционала  $T$  зависит от двух параметров прямой  $\rho$  и  $\theta$ , на основе которых формируется трейс-матрица ТМ. Триплетный признак сечения получается после обработки строк и столбцов матрицы ТМ функционалами  $\Theta$  и  $P$ , каждый из которых последовательно сокращает размерность матрицы на единицу (аналогично признаку 3D изображения).

Таким образом, признак 2D фигуры сечения имеет следующую структуру [5]:

$$\Pi(F_{\text{sect}}) = \text{Нурег } T(F_{\text{sect}}) = \Theta \circ P \circ T(F_{\text{sect}} \bigcap l(\theta, \rho)).$$

Благодаря композиции функционалов и гиперфункционалов, входящих в структуру признака  $\Pi(F_{\text{sect}})$  и  $\text{Res}(F)$  соответственно, возможно получение огромного числа признаков. Причем некоторые из них имеют явную геометрическую интерпретацию, что облегчает задачу построения признаков и повышает их различающую силу. Специфичная структура гипертриплетных и триплетных признаков позволяет строить признаки как чувствительные, так и инвариантные к группе движений и масштабированию, что повышает интеллектуальность и гибкость 3D трейс-метода при распознавании объектов.

В заключении стоит отметить, что приставка «гипер-» для всех терминов здесь и далее означает, что речь идет о пространственном объекте в целом и его свойствах, а не о каком-либо его конкретном сечении и их особенностях. Так, гиперфункционал  $\text{Нурег } P$  по сути

ничем не отличается от функционала  $P$  с той лишь разницей, что первый термин для удобства восприятия употребляется при обработке глубинных строк гипертрейс-матрицы ЗТМ, а второй термин — при обработке столбцов трейс-матрицы ТМ.

### Функционалы, инвариантные к переносу

Свойство инвариантности к переносу для любого функционала  $\zeta$  будет иметь вид:  $\zeta(f(x+b)) = \zeta(f(x))$  для всех допустимых  $f(x)$  и  $\forall b$ .

Так как объект сканируется сеткой параллельных плоскостей, то перемещение исходного 3D объекта изменяет только размер гипертрейс-матрицы на количество нулевых элементов внутри глубинных строк (вдоль осей  $0r$ ). При этом при этом все глубинные строки матрицы останутся на своих местах и значение признака  $\Pi(F_{\text{sect}})$  не изменяется. Таким образом, для того чтобы признак  $\text{Res}(F)$  (и признак  $\Pi(F_{\text{sect}})$  плоского сечения) был инвариантен к переносу, необходимо и достаточно, чтобы гиперфункционал  $\text{Hyper } P$  (и функционал  $P$ ) обладали свойством:  $\zeta_{x+b \neq 0}(f(x+b)) = \zeta_{x \neq 0}(f(x))$  для всех допустимых  $f(x)$  и  $\forall b$ .

Приведем пример признака, инвариантного к операции трансляции и чувствительного к операциям ротации и гомотетии. Этот пример будет объяснен подробно, а все остальные теоретические примеры будут описаны кратко:

$$\text{Res}(F) = \text{Hyper } \Theta \circ \text{Hyper } \Omega \circ \text{Hyper } P \circ \text{Hyper } T(\Theta \circ P \circ T),$$

где  $T(F_{\text{sect}} \cap l(\theta, \rho)) = \max_t f(\theta, \rho, t)$ ,  $P(g(\theta, \rho)) = \min_i f(\theta, \rho_i) / \sum_i f(\theta, \rho_i)$ ,  $\Theta(g(\theta)) = \arg_k f(\theta)$ ,  $\text{Hyper } T(F \cap B(\eta(\omega, \varphi), r)) = \Pi(F_{\text{sect}}) = G(\omega, \varphi, r)$ ,  $\text{Hyper } P(\Pi(\omega, \varphi, r)) = \max_r G(\omega, \varphi, r) / \min_r G(\omega, \varphi, r)$ ,  $\text{Hyper } \Omega(\Pi(\omega, \varphi)) = \text{NumMax}_\omega G(\omega, \varphi)$ ,  $\text{Hyper } \Theta(\Pi(\varphi)) = \arg_k G(\varphi)$ ,  $f(\theta, \rho, t)$  — длина  $t$ -го отрезка, высекаемого  $\rho_j$ -й прямой под  $\theta_i$ -м углом в плоскости сечения  $F_{\text{sect}}$ ,  $\Pi(F_{\text{sect}}) = G(\omega, \varphi, r)$  — признак сечения, получаемого  $r_h$ -й плоскости под  $(\omega_w, \varphi_s)$ -м углом,  $\arg_k V$  — функционал, вычисляющий  $k$ -ю координату вектора  $V$ ,  $\text{NumMax } f(x)$  — функционал, вычисляющий число локальных максимумов функции  $f(x)$ .

Так, для приведенного признака функционал  $T$  находит для каждой сканирующей прямой из сетки параллельных прямых под разными углами максимальный отрезок прямой, содержащийся в плоскости сечения  $F_{\text{sect}}$ . Функционал  $P$  для каждой сетки параллельных прямых из всего множества сеток под разными углами  $\theta$  в плоскости сечения вычисляет отношение минимальной длины среди указанных выше максимальных отрезков ко всей сумме этих отрезков внутри каждой сетки. Функционал  $\Theta$  выбирает среди подсчитанных выше отношений значение для  $k$ -й сетки. Функционал  $\text{Hyper } T$  соответствует признаку сечения, который вычисляется при помощи композиции функционалов  $\Theta \circ P \circ T$ . Функционал  $\text{Hyper } P$  для каждой сетки параллельных плоскостей вычисляет отношение максимального значения признака сечений к минимальному внутри каждой сетки. Функционал  $\text{Hyper } \Omega$  вычисляет число локальных максимумов функции, образованных дискретным рядом горизонтальных строк (ось  $O\omega$ ), содержащих значения отношений максимума к минимуму. Функционал  $\text{Hyper } \Theta$  выбирает среди подсчитанных выше значений  $k$ -ый элемент (ось  $O\varphi$ ).

Класс признаков, аналогичный приведенному выше, полезен в некоторых частных задачах, например, когда заранее известно, что анализируемые 3D объекты отличаются от эталонных в базе только переносом. Преимуществом данного класса признаков может являться их низкие вычислительные затраты, когда все функционалы, кроме  $T$  и  $\text{Hyper } T$ ,

заменяются на  $\arg_k V$  (ссылка на  $k$ -й элемент массива), или же их вычисление вообще игнорируется (сканирование плоскостями и прямыми происходит только под одним углом обзора  $(\omega, \varphi)$  и  $\theta$  соответственно).

Однако в общем случае на практике необходимо строить признаки, инвариантные хотя бы к повороту и переносу 3D изображения и чувствительные к масштабированию. Свойство инвариантности к переносу является очень полезным при решении различных задач, так как благодаря этому свойству не нужно производить нормализацию по переносу и определять центр масс объекта, сокращая, тем самым, дополнительные вычислительные затраты и получая признаки, более устойчивые к искажениям и координатному шуму.

## Функционалы, чувствительные к переносу

Свойство чувствительности к переносу для любого функционала  $\zeta$  будет иметь вид:  $\zeta(f(x+b)) = \zeta(f(x)) - b$  или  $\zeta(f(x+b)) = \zeta(f(x)) + b$ , или в общем виде  $\zeta(f(x+b)) = \zeta(f(x)) + bk$  для всех допустимых  $f(x)$  и  $\forall b, \forall k$ .

Возможность регулировать свойства конструируемых признаков повышает интеллектуализацию анализа и обработки 3D изображений, так как не только расширяет количество полезных признаков, эффективных для того или иного класса 3D объектов, но и позволяет извлекать дополнительную информацию об объекте, определять параметры преобразования самого объекта (отличия объекта от эталона) и т. п.

Так, например, покажем, как, вычисляя два чувствительных к переносу признака 3D объекта, можно получить в одной технике признак  $\text{Res}(F)$ , инвариантный к переносу, повороту и масштабированию, а также уравнения граней выпуклого многогранника, содержащего внутри себя исходный объект.

В качестве чувствительного к переносу признака возьмем следующий:

$$\text{Sen}(F) = \text{Hyper } \Theta \circ \text{Hyper } \Omega \circ \text{Hyper } P \circ \text{Hyper } T(\Theta \circ P \circ T),$$

где  $T(\theta, \rho) = (\max_t f(\theta, \rho, t) + \min_t f(\theta, \rho, t))/2$ ;  $P(\theta) = \min_i f(\theta, \rho_i)/\sum_i f(\theta, \rho_i)$ ;  $\Theta = \sqrt[k]{\prod_k f(\theta_k)}$ , если  $|f(\theta_k)| \geq 0,0001$ ;  $\text{Hyper } T(\omega, \varphi, r) = \Pi(F_{\text{sect}}) = G(\omega, \varphi, r)$ ;  $\text{Hyper } P(\omega, \varphi) = \arg_{\text{first}} G(\omega, \varphi, r)$ ;  $\text{Hyper } \Omega(\varphi) = \max_{\omega} G(\omega, \varphi)$ ;  $\text{Hyper } \Theta = \min_{\varphi} G(\varphi)$ ;  $\arg_{\text{first}}(\arg_{\text{last}})f$  — функционал, вычисляющий первый (последний) ненулевой элемент горизонтальной строки.

В качестве второго признака возьмем ту же структуру, за исключением одного функционала  $\text{Hyper } P$ , который заменим так:

$$\text{Hyper } P(\omega, \varphi) = \arg_{\text{last}} G(\omega, \varphi, r).$$

При этом заметим, что дополнительно производить сканирование для второго чувствительного признака не нужно: оба признака извлекаются из одной и той же гипертрейс 3ТМ и трейс ТМ матриц.

Далее определяются различные инвариантные признаки 3D модели, которые можно использовать для процедуры распознавания и классификации. В частности, ниже показан признак, который полностью инвариантен к группе движений и масштабированию, полученный по двум чувствительным к переносу признакам  $\text{SenTrans}_2(F)$  и  $\text{SenTrans}_1(F)$ :

$$\text{Res}(F) = \text{SenTrans}_1(F) - \text{SenTrans}_2(F).$$

Показанный выше признак, характеризует наибольшую ширину исходного объекта видимую под выбранным с помощью функционалов  $\Theta$ ,  $\text{Нурег } \Omega$  и  $\text{Нурег } \Theta$  углом обзора. Более строгое определение выглядит следующим образом: характеризует наибольшую длину между точками множества, полученными как ортогональное отображение всех вершин исходного 3D объекта на прямую, параллельную сетке сканирующих плоскостей и перпендикулярную выбранному направлению — вектору нормали к плоскости сечения.

Кроме полученного выше признака можно построить множество других признаков также инвариантных к группе движений и масштабированию.

Промежуточным продуктом вычислений является тройка  $(\omega_i, \varphi_j, r_k)$ , которой соответствует элемент матрицы с номером  $(i, j, k)$  и значением  $\Pi(F_{\text{sect}})$ , который характеризует информативный признак фигуры, полученной в сечении объекта  $F$  плоскостью  $B(\eta(\omega_i, \varphi_j), r_k)$ . Поэтому параллельно в одной технике сканирования можно определить уравнения граничных плоскостей:

$$\cos \varphi_j \sin \omega_i \cdot x + \cos \varphi_j \cos \omega_i \cdot y + \sin \varphi_j \cdot z = r_k.$$

Стоит отметить, что, используя сортировку вектора по возрастанию и выбирая его любую  $i$ -ю координату, можно выбирать различные граничные плоскости под любым углом обзора, содержащие внутри себя исходный объект.

Таким образом, определив параметрически множество коэффициентов уравнений граней, можно полностью построить выпуклый многогранник, содержащий внутри себя исходный объект. Причем можно построить не только выпуклый параллелепипед, но и любой другой выпуклый многогранник. Чем больше признаков такого класса вычисляется, тем более полигональный становится данный многогранник, вплоть до точной копии самого объекта (аналогично, obj или 3ds модели).

Итак, одним из сильных сторон гипертрейс-преобразования является не только предобработка и анализ 3D изображения в одной технике сканирования, но и возможность его постобработки в той же технике. Другими словами, можно производить процесс, противоположный полигональному сглаживанию поверхности 3D объекта. При этом мы параллельно знаем не только размеры этого многогранника, но и его границы (параметрическая система уравнений плоскостей граней объекта).

Аналогично можно построить выпуклый многогранник, полностью содержащийся в исходной 3D модели.

## Функционалы, инвариантные к повороту

Стандартный перебор всех углов сетки плоскостей  $\omega$  и  $\varphi$  в топологическом смысле для непрерывного случая дает модель концентрических сфер с центром в начале координат. Каждой плоскости сопоставим точку ее касания с соответствующей сферой.

Рассмотрим единичную сферу. Множество точек на сфере образуют сетку, которую будем называть опорной. Отметим, что смена углов происходит согласно узлам опорной сетки, однозначно определяющим единственную плоскость.

В функциональном виде свойство инвариантности к повороту для любого функционала  $\zeta$  выглядит следующим образом:  $\zeta(f(M(\nu, \alpha)X)) = \zeta(f(X))$  для всех допустимых  $f(X)$ ,  $\forall \nu$  и  $\forall \alpha$ , где  $X$  — точка объекта в трехмерном пространстве,  $\nu(x, y, z)$  — единичный вектор (ось вращения),  $\alpha$  — угол поворота вокруг вектора  $\nu$ ,  $M(\nu, \alpha)$  — двумерная

матрица поворота:

$$M(\nu, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha + x^2(1 - \cos \alpha) & xy(1 - \cos \alpha) - z \sin \alpha & xz(1 - \cos \alpha) + y \sin \alpha \\ yx(1 - \cos \alpha) + z \sin \alpha & \cos \alpha + y^2(1 - \cos \alpha) & yz(1 - \cos \alpha) - x \sin \alpha \\ zx(1 - \cos \alpha) - y \sin \alpha & zy(1 - \cos \alpha) + x \sin \alpha & \cos \alpha + z^2(1 - \cos \alpha) \end{pmatrix}$$

Для дискретного случая на обычной карте глобуса вблизи полюса наблюдается более плотное скопление точек, чем у экватора. Поэтому если при повороте полюс совместить с точкой на экваторе, то будут заметны отклонения точек узлов исходной и повернутой сетки, что скажется на распознавании объектов, так как каждая точка опорной сетки на сфере однозначно определяет угол наклона сетки параллельных плоскостей. Поэтому необходимо строить такую опорную сетку, которая будет обладать равномерным распределением точек на сфере. Идеи построения равномерной сетки на сфере можно найти в [3].

Инвариантность к повороту получаемых признаков зависит не только от плотности совокупности сеток сканирующих плоскостей в пространстве, но и применения специального типа функционалов, которые обрабатывают горизонтальные строки и вертикальные столбцы матрицы ЗТМ.

Свойство инвариантности к сдвигу периодической функции  $f$  с периодом  $r$  для любого функционала  $\zeta$  будет иметь вид:  $\zeta(f(x+b)) = \zeta(f(x))$  для всех допустимых  $f(x)$  и  $\forall b$ .

Так как равномерная сетка на сфере неизоморфна равномерной сетке на плоскости, то при формировании 3D трейс-матрицы ЗТМ возникают трудности сохранения целостности структуры и порядка следования строк самой гипертрейс-матрицы. Так как порядок сечений (дискретная форма 3D объекта) не изменяется при повороте сетки сканирующих плоскостей, то глубинные строки сохраняют свой порядок следования элементов. Поэтому основная проблема состоит в сохранении порядка следования строк и столбцов друг за другом. Эта проблема легко решается, если определить правила формирования 3D трейс-матрицы и ключевые точки, которые сами могут выступать как чувствительные к повороту признаки. Данные опорные ключевые точки определяют начало отсчета, от которых начинается заполняться гипертрейс-матрица (например, по часовой стрелке в направлении отсчета от второй ключевой точки).

В общем случае в терминах трейс-матриц строки и столбцы матрицы ЗТМ сдвинутся на  $\omega$ -ое и  $\varphi$ -ое число вперед или назад соответственно, в зависимости от знака углов и правила нумерации узлов опорной сетки. При этом порядок их следования друг за другом не изменится. Соответственно ее гипертрейс-образ (графическое представление гипертрейс-матрицы) будет сдвинут вдоль горизонтальной  $0\omega$  и вертикальной оси  $0\varphi$  на соответствующее расстояние, равное углам поворота.

Стоит помнить, что наилучший способ нумерации узлов опорной сетки будет наиболее близкий к методу ее построения, когда построение узлов и их нумерация будет осуществляться в одной технике.

Более подробно свойства инвариантности к повороту для 3D трейс-преобразования можно найти в [6, 7], а для 2D трейс-преобразования в плоскости сечения — в [8].

Ниже приведен пример признака, инвариантного к операции ротации и трансляции и чувствительного к операции гомотетии:

$$\text{Res}(F) = \text{Hyper } \Theta \circ \text{Hyper } \Omega \circ \text{Hyper } P \circ \text{Hyper } T(\Theta \circ P \circ T),$$



где  $T(\theta, \rho) = \sum_t f(\theta, \rho, t)$ ;  $P(\theta) = (\min_i f(\theta, \rho_i) + \max_i f(\theta, \rho_i))/2$ ;  $\Theta = c \sum_k f(\theta_k)/n$ ;  
 Hyper  $T(\omega, \varphi, r) = G(\omega, \varphi, r)$ ; Hyper  $P(\omega, \varphi) = 1/\min_r G(\omega, \varphi, r)$ ; Hyper  $\Omega(\varphi) = \max_\omega G(\omega, \varphi)$ ;  
 Hyper  $\Theta = \sum_\varphi G(\varphi)$ .

### Функционалы, чувствительные к повороту

Роль сеток при конструировании гипертриплетных признаков подробно описана в разделе выше. Использовать неравномерные опорные сетки на сфере, которые в общем случае дают признаки, чувствительные к повороту, не представляется возможным, так как уровень ошибки, получаемой отклонением узлов сетки друг от друга при повороте сферы, является неконтролируемой величиной и в общем случае может сильно искажать вычисляемые признаки.

Однако получить признаки, чувствительные к повороту, можно при помощи применения чувствительных функционалов. Данный класс признаков не только увеличивает разнообразие конструируемых информативных признаков, но и позволяет извлекать информацию о пространственной ориентации объекта.

Свойство инвариантности к сдвигу периодической функции  $f$  с периодом  $r$  для любого функционала  $\zeta$  будет иметь вид:  $\zeta(f(x+b)) = \zeta(f(x)) - k$  или  $\zeta(f(x+b)) = \zeta(f(x)) + k$  для всех допустимых  $f(x)$  и  $\forall b$ , где  $r$  — любое положительное действительное число,  $k \equiv b \pmod{r}$  и  $0 \leq k < r$ .

Чувствительные к повороту функционалы можно неформально интерпретировать как операцию выбора точки на двумерной поверхности в трехмерном пространстве независимо от пространственной ориентации 3D объекта. Так, как указывалось в предыдущем разделе, ключевые точки могут играть роль чувствительных к повороту признаков. Ниже приведен пример одного из них, который вычисляет вектор нормали к одной из секущих плоскостей:

$$\text{SenRot}_1(F) = (\text{Hyper } \Theta; \text{Hyper } \Omega; \text{Hyper } P) \circ \text{Hyper } T(\Theta \circ P \circ T).$$

Здесь  $T(\theta, \rho) = \text{median}_t f(\theta, \rho, t)$ ;  $P(\theta) = \sum_i f(\theta, \rho_i)/n$ ;  $\Theta = \max_k f(\theta_k)$ ; Hyper  $T(\omega, \varphi, r) = \Pi(F_{\text{sect}})$ ; Hyper  $P = \arg \max_r G(\omega, \varphi, r)$ ; Hyper  $\Omega = \arg \max_\omega G(\omega, \varphi, r)$ ; Hyper  $\Theta = \arg \max_\varphi G(\omega, \varphi, r)$ , где *median* — медиана дискретного ряда чисел.

Ключевые точки отличаются друг от друга выбором функционала:

$$\text{SenRot}_2(F) = \{\omega_2^*; \varphi_2^*; r_2^*\} = \left\{ \arg \min_\omega G; \arg \min_\varphi G; \arg \min_r G \right\}.$$

Определив несколько таких векторов, мы получаем ключевые точки опорной сетки на сфере, предварительно нормализовав их длину до единицы. При этом стоит отметить, ускорить данную процедуру можно сделав значение  $r$  сразу равным единице. Длина между такими точками является признаком, инвариантным к группе движений и операции гомотетии исходного 3D объекта. Причем это может быть длина дуги, длина прямолинейного отрезка и т. п.:

$$\text{Res}(F) = (\sin \varphi_2 \cos \omega_2 - \sin \varphi_1 \cos \omega_1)^2 + (\sin \varphi_2 \sin \omega_2 - \sin \varphi_1 \sin \omega_1)^2 + (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2.$$

Угол между прямыми, проходящими через одинаково определяемую ключевую точку для повернутого и исходного объекта, даст значение угла, при котором один объект можно

совместить поворотом в другой. Данная процедура осуществляется в той же технике, что и сканирование и обработка 3D изображения и подробно в данной статье описываться не будет. Ее можно найти в [9]. Основная идея построения такого типа признаков заключается в выборе двух чисел из всего множества значения циклической функции, обладающих конкретными особенностями (например, максимум или медиана). После этого находится между ними расстояние, которое в общем случае постоянно вне зависимости от операций ротаций 3D объекта.

## Функционалы, инвариантные к масштабированию

Стоит отметить, что одним из преимуществ пространственного трейс-преобразования является возможность конструирования признаков 3D фигур инвариантных одновременно не только к группе движений, но и к масштабированию. Свойство инвариантности к масштабированию для любого функционала  $\zeta$  будет иметь вид:  $\zeta(f(ax)) = \zeta(f(x))$  для всех допустимых  $f(x)$  и  $\forall a$ .

Получение данного класса признаков достигается несколькими способами. К первому способу можно отнести подбор специальных типов функционалов, которые дают одинаковое значение вне зависимости от масштаба объекта. Гипертриплетные признаки, построенные на их основе при применении также функционалов инвариантных к трансляции и ротации, дают инвариантное описание 3D объекта. Как правило, данные признаки  $\text{Res}(F)$  описывают свойства или особенности формы 3D объекта. В качестве примера можно привести такой функционал как число пересечений сканирующей плоскости с 3D изображением, который указывает на наличие пустых полостей внутри объекта. Данный функционал также способен определить количество впадин, пиков или составных частей объекта, число которых не изменяется при изменении масштаба. Другие виды функционалов могут определить углы наклона склонов холмов на поверхности тела, если таковые имеются, и т. п.

К таким типам функционалов можно отнести еще определение числа локальных максимумов (минимумов) функции, коэффициент корреляции и т. п.

Ко второму способу относятся, как правило, комбинации отношения признаков, которые нивелируют коэффициент масштабирования. Например, такие комбинации, как  $\max(l)/\min(l)$ ,  $\sqrt{S(F_{\text{sect}})}/P(F_{\text{sect}})$ ,  $S^3(F)/V^2(F)$  и т. п., где  $l$  — длина отрезка прямой, заключенной в 2D фигуре сечения,  $S(F_{\text{sect}})$  — площадь сечения,  $P(F_{\text{sect}})$  — периметр сечения,  $S(F)$  — площадь поверхности исходной 3D фигуры,  $V(F)$  — объем сходной 3D фигуры. При конструировании такого класса гипертриплетных признаков необходимо учитывать размерность  $m$  вычисляемого признака. Так, длина отрезка имеет  $m = 1$ , а периметр сечения имеет  $m = 2$ . Так, чтобы снизить влияние линейных искажений и координатных шумов, следует выбирать и делить на такие признаки объектов, которые менее подвержены влиянию шума, чем другие признаки. Например, для признаков разных размерностей это будут радиус описанной сферы около объекта, площадь поверхности объекта и объем исходного тела соответственно.

Учитывая возможность использования различных видов функционалов, саму композиционную структуру гипертриплетного признака (перестановки функционалов местами), а также различные виды комбинаций отношений между признаками, можно получить большое количество признаков, инвариантных к масштабированию. Ниже представлен признак, инвариантный к операциям трансляции, ротации и гомотетии:

$$\text{Res}(F) = \text{Hyper } \Theta \circ \text{Hyper } \Omega \circ \text{Hyper } P \circ \text{Hyper } T(\Theta \circ P \circ T),$$

где  $T(\theta, \rho) = \min_t f(\theta, \rho, t)$ ;  $P(\theta) = \sqrt{\sum_j (f(\theta, \rho_j) - \sum_i f(\theta, \rho_i))/n}$ ;  $\Theta = \sum_i f(\theta_i)$ ;  $\text{Hyper } T = \Pi(F_{\text{sect}})$ ;  $\text{Hyper } P(\omega, \varphi) = \sum_r G(\omega, \varphi, r)$ , если  $G \geq \text{median}_r(G)$ ;  $\text{Hyper } \Omega(\varphi) = \max_\omega (G(\omega, \varphi))$ ;  $\text{Hyper } \Theta = \text{kol}(G(\varphi))$ , если  $G \leq \sum_\varphi G(\varphi)/n$ .

## Функционалы, чувствительные к масштабированию

Свойство чувствительности к масштабированию для любого функционала  $\zeta$  будет иметь вид:  $\zeta(f(ax)) = (1/a)\zeta(f(x))$  или  $\zeta(f(ax)) = a\zeta(f(x))$  для всех допустимых  $f(x)$  и  $\forall a \neq 0$ .

Чувствительность получаемых признаков  $\text{Res}(F)$  достигается путем подбора функционалов, чувствительных к масштабированию, удовлетворяющих условию выше.

На языке трейс-матриц чувствительность выражается в том, что гипертрейс-матрица увеличивает  $\mu > 1$  количество своих ненулевых значений в  $i$ -ой строке глубины, т. к. исходный объект будет пересекать больше секущих плоскостей. Тем самым соответствующие графические образы трейс-матриц расширяются при  $\mu > 1$  относительно оси, определяющей расстояние до фигуры. Для трейс-матриц 2D изображений в плоскости сечения эту роль играет ось  $\rho$ , для трейс-матриц 3D изображений — ось  $r$ .

Учет свойства чувствительности может быть произведен двумя способами. В первом случае все получаемые признаки приводятся к одному масштабу (например, единичному). Так, чтобы получить единичный масштаб, достаточно разделить все вычисляемые признаки, например, на максимальный элемент. Для получения более устойчивого значения признака к помехам необходимо брать несколько определяющих элементов по разным правилам. Далее, зная и учитывая коэффициент масштабирования, вычисленные гипертрейс-признаки исходного объекта сравниваются с признаками других объектов:

$$\sum_{j, j \neq k} \left| \frac{\text{Res}(F)_{i,k}}{\mu_{i,k}^{m[i,k]}} - \frac{\text{Res}(F)_{i,j}}{\mu_{i,j}^{m[i,j]}} \right| \leq \delta_i,$$

где  $j$  — номер объекта;  $m[i, j]$  — размерность  $i$  го признака  $j$ -го объекта;  $\mu_{i,j}$  — коэффициент масштабирования  $i$  го признака  $j$ -го объекта;  $\delta_i$  — порог схожести объектов по  $i$  му признаку.

Коэффициент масштабирования может быть получен непосредственно из результатов техники сканирования. Так, среди всех сечений  $F_{\text{sect } i, j}$  под  $j$ -м углом  $i$ -й плоскости выбирается определяющее сечение  $Q_k = h(S_k)_{i,j}$  по правилу  $h$  отдельно для каждого признака, где  $S$  — вектор  $N$  признаков сечения  $F_{\text{sect } i}$ . В качестве правила  $h$  может быть взята функция среднего арифметического для получения, например, сечения с усредненным значением периметра. Затем все значения  $k$ -го признака делятся на это значение:  $\mu_k = (F_{\text{sect } k})_{i,j}/Q_k$ .

Второй подход учета чувствительных признаков состоит в сведении всех получаемых признаков к неопределенному масштабу — безразмерной величине. Ниже приведен пример признака, чувствительного к масштабированию и инвариантного к группе движений:

$$\text{SenGomo}(F) = \text{Hyper } \Theta \circ \text{Hyper } \Omega \circ \text{Hyper } P \circ \text{Hyper } T(\Theta \circ P \circ T),$$

где  $T(\theta, \rho) = \max_t f(\theta, \rho, t)$ ;  $P(\theta) = \Delta t \sum_i f(\theta, \rho_i)$ ;  $\Theta = \sum_i f(\theta_i)$ ;  $\text{Hyper } T = \Pi(F_{\text{sect}})$ ;  $\text{Hyper } P(\omega, \varphi) = \text{median}_r G(\omega, \varphi, r)\Delta h$ ;  $\text{Hyper } \Omega(\varphi) = \max_\omega G(\omega, \varphi)$ ;  $\text{Hyper } \Theta = \min_\varphi G(\varphi)$ ;  $\Delta t$  — расстояние между параллельными прямыми в плоскости сечения,  $\Delta h$  — расстояние между параллельными плоскостями.

**Результаты.** Ввиду того, что статья носит концептуальный характер, описывает математическую модель и интеллектуальные возможности метода, а также того, что объем настоящей работы ограничен, реальные практические эксперименты и тестирование признаков на различных базах 3D объектов в данной статье не проводится. Их можно найти в [10, 11].

По мере необходимости в данной статье приводилось не только множество теоретических примеров признаков, обладающие указанными свойствами, но и разбирались и описывались дополнительные возможности метода, улучшающие интеллектуальную обработку и анализ 3D изображений.

В завершении подчеркнем, что для получения признаков, инвариантных к группе движений и масштабированию, необязательно использовать только такие функционалы, которые инвариантны к указанным выше операциям. Инвариантность может быть достигнута даже при использовании части функционалов, чувствительных к некоторым преобразованиям 3D изображений.

## Заключение

Метод, рассмотренный в статье, обладает определенной универсальностью, так как схема сканирования не привязана к геометрическим особенностям исходной модели. В связи с этим предлагаемая методика ориентирована на объекты любой сложности и конфигурации, что повышает интеллектуальные возможности 3D трейс-преобразования.

Предлагаемый метод позволяет давать инвариантное описание исходного 3D объекта при любых операциях трансляции, ротации и гомотетии. Помимо того, конструируемые гипертриплетные признаки обладают высокой устойчивостью к координатному шуму и линейным искажениям [12], они имеют хорошую геометрическую интерпретацию, улучшающие интеллектуальные возможности анализа. Высококачественный интеллектуальный анализ с помощью гипертрейс-преобразования реализуется благодаря возможности регулирования свойств построенных признаков. Чувствительные признаки, кроме того, дают возможность извлекать в той же технике сканирования множество дополнительной информации об объекте, в частности его преобразованиях, знание которой необходимо при решении некоторого класса практических задач (например, позиционирование инструмента в робототехнике").

Также одной из интеллектуальных способностей предлагаемого метода является высокоуровневая предобработка, обработка и анализ 3D изображения в одной технике сканирования.

Авторы планируют развить данный метод для анализа не только бинарных и монохромных 3D изображений, но и цветных и текстурных 3D изображений. Аналогичные результаты уже были получены при анализе цветных и текстурных 2D изображений в [13, 14]. Интеллектуальный уровень гипертрейс-преобразования может быть повышен благодаря развитию теории на аффинно-инвариантные преобразования. Аналогичный результат для трейс-преобразования уже получен в [15]. Планируется также развить гипертрейс-преобразования для интеллектуального анализа и распознавания деформированных и поврежденных 3D объектов. Сейчас авторами ведется работа по развитию теории при нелинейной фильтрации 3D изображений на этапе его предобработки в той же технике сканирования, аналогично результатам для 2D изображений [16].

## Литература

- [1] Федотов Н. Г., Семов А. А. Краткий обзор основных подходов к анализу 3D-моделей и разработка 3D трейс-преобразования // *Новые информационные технологии и системы (НИТИС-2012): Сб. тр. X Междунар. научно-технич. конф.* Пенза: Изд-во Пенз. ГУ, 2012. С. 222–225.
- [2] Федотов Н. Г., Фионов Н. С., Романенко Ю. А., Баннов В. Я. Развитие принципов интеллектуального поиска биометрических изображений на основе стохастической геометрии и функционального анализа // *Надежность и качество: Тр. Междунар. симпозиума* / Под ред. Н. К. Юркова. Пенза: Изд-во Пенз. ГУ, 2012. Т. 2. С. 394.
- [3] Федотов Н. Г., Семов А. А. Идеи построения равномерной сетки на сфере и 3D трейс-преобразование // *Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XIII Междунар. научно-технич. конф.* Пенза: Изд-во АННОО «Приволжский Дом знаний», 2013. С. 23–26.
- [4] Федотов Н. Г., Семов А. А. 3d трейс-преобразование и его свойства // *XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего — плюс. Научно-методический журнал. Серия: технические науки. Информационные технологии.* Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. Акад., 2013. № 10(14). С. 68–74.
- [5] Fedotov N. G. The Theory of image — recognition features based on stochastic geometry // *Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications*, 1998. Vol. 8, No. 2. P. 264–266.
- [6] Семов А. А. Об одном подходе к распознаванию 3D-изображений // *Надежность и качество: Тр. Междунар. симпозиума* / Под ред. Н. К. Юркова. Пенза: Изд-во Пенз. ГУ, 2013. Т. 1. С. 350–351.
- [7] Fedotov N. G., Ryndina S. V., Syetov A. A. Trace transform of spatial images // *11th Conference (International) on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-11-2013) Proceedings. (V. I-II)*. Samara: IPSI RAS, 2013. Vol. I. P. 186–189.
- [8] Федотов Н. Г., Семов А. А. Гипертрейс-преобразование, инвариантное к группе движений 3D-объектов // *Современные методы и средства обработки пространственно-временных сигналов: Сб. статей XII Всеросс. научно-технич. конф.* Пенза: Изд-во АННОО «Приволжский Дом знаний», 2014. С. 38–43.
- [9] Федотов Н. Г. Анализ свойств триплетных признаков распознавания при различных вариантах сканирования изображений // *Надежность и качество: Тр. Междунар. симпозиума* / Под ред. Н. К. Юркова. Пенза: Изд-во Пенз. ГУ, 2013. Т. 1. С. 80–82.
- [10] Федотов Н. Г., Семов А. А. Новый метод распознавания и поиска 3D-объектов по базам данных // *Открытые инновации — вклад молодежи в развитие региона: Сб. материалов регионального молодежного форума.* Пенза: Изд-во Пенз. ГУ, 2013. Т. 1. С. 192–194.
- [11] Федотов Н. Г., Семов А. А., Крючкова Е. А. Особенности реализации и способы ускорения вычислений 3D-трейс-преобразования // *Надежность и качество: Тр. Междунар. симпозиума* / Под ред. Н. К. Юркова. Пенза: Изд-во Пенз. ГУ, 2014. Т. 1. С. 393–396.
- [12] Семов А. А. Повышение надежности распознавания 3D-объектов на основе методов стохастической геометрии // *Надежность и качество: Тр. Междунар. симпозиума* / Под ред. Н. К. Юркова. Пенза: Изд-во Пенз. ГУ, 2014. Т. 1. С. 393–396.
- [13] Fedotov N. G., Mokshanina D. A. Recognition of halftone textures from the standpoint of stochastic geometry and functional analysis // *Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications*, 2010. Vol. 20, No. 4. P. 551–556.
- [14] Fedotov N. G., Mokshanina D. A. Recognition of images with complex half-tone texture // *Measurement Techniques*, 2011. Vol. 53, No. 11. P. 1226–1232.

- [15] Федотов Н. Г. Теория признаков распознавания образов на основе стохастической геометрии и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 304 с.
- [16] Федотов Н. Г., Крючкова Е. А., Мусеев А. В., Семов А. А. Предварительная обработка изображений на основе трейс-преобразований // *Надежность и качество: Тр. Междунар. симпозиума* / Под ред. Н. К. Юркова. Пенза: Изд-во Пенз. ГУ, 2011. Т. 2. С. 315–316.

## References

- [1] Fedotov N. G., Syemov A. A. 2012. Brief review of approaches for analysis of 3D-models and development of 3D trace-transform. *New information technologies and systems (NITIS-2012): Proceedings of the X International Scientific and Technical Conference*. Penza: Publ. PenzGU. 222–225. (in Russ.)
- [2] Fedotov N. G., Fionov N. S., Romanenko Yu. A., Bannov V. J. 2012. Developing the principles for intelligent search of biometric images based on stochastic geometry and functional analysis. *Reliability and quality: Proceedings of the International Symposium, ed. N. K. Jurkov*. Penza: Publ. PenzGU. 2:394. (in Russ.)
- [3] Fedotov N. G., Syemov A. A. 2013. The ideas of building a uniform grid on the sphere and 3d Trace transform. *Problems of Informatics in Education, Management, Economics and Technology: Proceedings of the XIII International Scientific and Technical Conference*. Penza: Publ. ANPSEO "Privolzskiy Dom Znaniy". 23–26. (in Russ.)
- [4] Fedotov N. G., Syemov A. A. 2013. The 3d trace-transform and its properties. *XXI century: past results and present problems – plus. Scientific-methodical journal. Series: engineering science. Information technology*. Penza: Publ. Penz. Gov. Technol. Academ. 10(14): 68–74. (in Russ.)
- [5] Fedotov N. G. 1998. The Theory of Image-Recognition Features Based on Stochastic Geometry. *Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications* 8(2):264–266.
- [6] Syemov A. A. 2013. About an approach to the recognition of 3D images. *Reliability and quality: Proceedings of the International Symposium, ed. N. K. Jurkov*. Penza: Publ. PenzGU. 1:350–351. (in Russ.)
- [7] Fedotov N. G., Ryndina S. V., Syemov A. A. 2013. Trace transform of spatial images. *11-th International conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information technologies (PRIA-11-2013). Conference Proceedings (V. I-II)*. Samara: IPSI RAS. 1:186–189.
- [8] Fedotov N. G., Syemov A. A. 2014. Hypertrace-transform invariant to the motions group of 3D-objects. *Modern methods and tools the processing of spatio-temporal signals: Proceedings of the XII All-Russian Scientific and Technical Conference*. Penza: Publ. ANPSEO "Privolzskiy Dom Znaniy". 38–43.
- [9] Fedotov N. G. 2013. Analyzing the properties of the triplet recognition features in different types of images scanning. *Reliability and quality: Proceedings of the International Symposium, ed. N. K. Jurkov*. Penza: Publ. PenzGU. 1:80–82. (in Russ.)
- [10] Fedotov N. G., Syemov A. A. 2013. A new method of 3D-objects recognition and retrieval from databases. *Open innovations - the contribution of the youth in the region development: Proceedings of regional youth forum (V. I-II)*. Penza: Publ. PenzGU. 1:192–194. (in Russ.)
- [11] Fedotov N. G., Syemov A. A., Kryuchkova E. A. 2014. Some particularities of 3D trace-transform implementation, and the ways to accelerate their calculations. *Reliability and quality: Proceedings of the International Symposium, ed. N. K. Jurkov*. Penza: Publ. PenzGU. 1:390–393. (in Russ.)
- [12] Syemov A. A. 2014. Reliabilization of 3D objects' recognition on the basis of stochastic geometry methods. *Reliability and quality: Proceedings of the International Symposium, ed. N. K. Jurkov*. Penza: Publ. PenzGU. 1:393–396. (in Russ.)

- [13] Fedotov N. G., Mokshanina D. A. 2010. Recognition of halftone textures from the standpoint of stochastic geometry and functional analysis. *Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications* 20(4):551–556.
- [14] Fedotov N. G., Mokshanina D. A. 2011. Recognition of images with complex half-tone texture. *Measurement Techniques*. 53(11):1226–1232.
- [15] Fedotov N. G. 2009. The theory of patterns recognition features based on stochastic geometry and functional analysis. Moscow: PhysMathLit. 304 p. (in Russ.)
- [16] Fedotov N. G., Kryuchkova E. A., Moiseev A. V., Syemov A. A. 2011. Images preprocessing based on trace-transform. *Reliability and quality: Proceedings of the International Symposium*, ed. N. K. Jurkov. Penza: Publ. PenzGU. 2:315–316. (in Russ.)