

# Экспериментальное исследование параметров регуляризации и аппроксимации скелетных графов бинарных изображений

О. А. Кушнир<sup>1</sup>, О. С. Середин<sup>2</sup>, А. В. Степанов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>kushnir-olesya@crambler.ru, <sup>2</sup>oseredin@yandex.ru, <sup>3</sup>tokbl@mail.ru

Тула, Тульский государственный университет

В работе систематизируются и уточняются сведения о параметрах стабилизации непрерывного скелетного графа — коэффициентах регуляризации и аппроксимации. Также приводится алгоритм вычисления диаметра минимальной описанной вокруг скелета окружности, являющегося масштабным множителем для применения коэффициента аппроксимации. Проводятся экспериментальные исследования влияния коэффициентов регуляризации и аппроксимации на топологию скелета и выдвигаются предположения по определению их адекватных значений для выделения в исходном скелете его базового подграфа — устойчивого дескриптора формы фигуры при наличии шумовых изменений ее границы.

**Ключевые слова:** бинарное растровое изображение, скелетный граф, базовый подграф, регуляризация и аппроксимация скелета, минимальная описанная окружность.

## Experimental study of regularization and approximation parameters for binary images skeletons

*Kushnir O. A.<sup>1</sup>, Seredin O. S.<sup>2</sup>, Stepanov A. V.<sup>3</sup>*

Tula State University

The article is devoted to the problem of avoiding the complexity and instability of binary images continuous skeletons by means of the regularization and approximation coefficients. The algorithm for computing the minimal diameter of circle circumscribed about the skeleton is suggested. Minimal diameter is a scaled multiplier which is used for computation of the approximation coefficient. Experimental study of how the regularization and approximation parameters affect the skeleton topology has been done, and assumptions about the appropriate values for finding the base subgraph of skeleton for the stable shape description are proposed.

**Keywords:** binary image, skeleton base, pruning, approximation, minimal circumscribed circle.

### Введение

Одним из способов описания бинарного изображения является скелетный граф [1]. Однако недостатком этого подхода является чувствительность к шумам (рис. 1 [2]). Так, скелетное описание чрезвычайно восприимчиво к локальным свойствам края объекта: с каждой точкой локального максимума кривизны границы связана отдельная ветвь скелета. Получается, что две области, имеющие сходную форму, но разную изрезанность края, принципиально различны в смысле топологической структуры их скелетов. Следовательно, скелет является неустойчивым дескриптором, который нельзя без дополнительных преобразований использовать для описания и сравнения форм [4, 3, 5].

Существует несколько процедур для управления сложностью топологии скелета: регуляризация, аппроксимация, склейка. Данная статья посвящена анализу коэффициентов регуляризации и аппроксимации. Нам неизвестны систематические исследования для подбора оптимальных (разумных) значений этих коэффициентов. Мы считаем, что именно

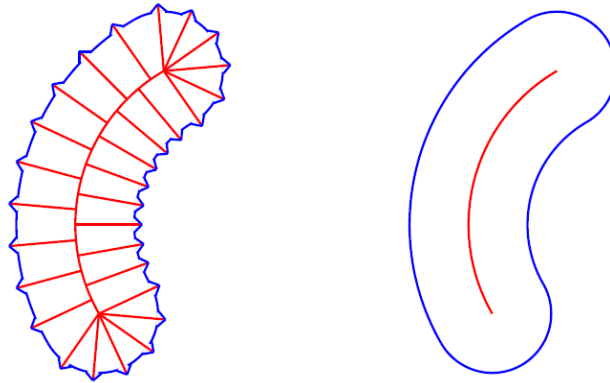


Рис. 1: Иллюстрация неустойчивости скелетного описания

неудачный выбор данных параметров (или отсутствие выбора: например, берутся параметры по умолчанию для решения любой задачи) зачастую отвращает специалистов в области анализа изображений от использования скелетной морфологии. Суть параметров кратко описана ниже.

**Регуляризация скелета.** Выделение в скелете части, которая называется базовым скелетом, и удаление ребер, появление которых обусловлено шумовыми эффектами, называется регуляризацией скелета. Иногда используется термин «стрижка», англ. *pruning* [2, 4, 6, 7]. Для непрерывных скелетов используется метод регуляризации скелета с контролируемой точностью [5, 8]. Суть его состоит в том, что евклидово расстояние между границей исходной фигуры и границей, которая будет получена после удаления очередного терминального ребра скелета, сравнивается с заданным параметром регуляризации. Ребро может быть удалено и, следовательно, не будет составлять базовый скелет, если это расстояние не превосходит коэффициент регуляризации. Силуэт фигуры, соответствующей усеченному скелету, восстанавливается путем объединения максимальных вписанных в фигуру окружностей с центрами на базовом скелете.

Кроме того, следует отметить содержательно близкий стрижке метод, основанный на понятии разметки скелета [9].

Для дискретных скелетов нельзя точно вычислить радиусы вписанных в фигуру окружностей. Поэтому для них используется метод, основанный на сравнении разности площадей исходной фигуры и фигуры, соответствующей усеченному скелету, с коэффициентом регуляризации [10]. Понятно, что для одной и той же фигуры в случае применения дискретного и непрерывного скелета значение параметра регуляризации будет разным.

В работе [11] было определено понятие интервалов стабилизации числа вершин скелета в зависимости от коэффициента регуляризации. На одном из таких интервалов остается только то множество ребер, которое образует базовый скелет изображения. Значение коэффициента регуляризации в начале этого интервала автор называет оптимальным. Отметим, что в работе не было проведено исследование по определению релевантного интервала стабилизации для каждого класса тестовой выборки, и коэффициент стрижки подбирался вручную.

**Аппроксимация.** Для решения определенного рода задач (например, задач сравнения изображений [12]) бывает недостаточно выполнить только регуляризацию скелета. Дополнительным механизмом стабилизации скелетного графа является процедура аппроксимации скелета. Идея процедуры аппроксимации для дискретных скелетов описана в [10]. Поясним, что в дискретном скелете вершины имеют либо степень 1, либо степень больше

двух, а ребра, соединяющие вершины, могут иметь произвольную форму, т.е. быть прямыми и кривыми линиями. Аппроксимация представляет собой замену ребра произвольной формы прямыми отрезками либо одним прямым отрезком, основываясь на определении степени кривизны изначального ребра.

В непрерывных скелетах вершины могут иметь любую степень, начиная с 1. Все ребра непрерывного скелета упрощенно будем считать прямыми. Последовательно соединенные между собой ребра (цепочка ребер), все вершины которых, за исключением двух крайних, имеют степень 2, называют ветвью скелета. Аппроксимация представляет собой замену скелетной ветви прямым ребром на основе оценки кривизны ветви. Для того, что избежать неоднозначности понимания процесса аппроксимации непрерывного скелета, приведем подробное описание.

Процесс аппроксимации непрерывного скелета изображен на рис. 2. Дана скелетная ветвь  $A, B, C, D, E$ . Вычислен диаметр минимальной описанной около скелета окружности  $D_{\min}$  и задана пороговая величина, представляющая собой некоторую часть от  $D_{\min}$  и изменяющаяся в диапазоне  $[0 \dots 1]$ . Назовем эту величину коэффициентом аппроксимации и обозначим  $K_a$ . Находим вершину ветви, наиболее удаленную от прямой, проведенной через концы цепочки  $A$  и  $E$  (вершина  $C$ ). Сравниваем расстояние  $CO$  от вершины  $C$  до прямой  $AE$  с величиной  $K_a * D_{\min}$  (она равна расстоянию от прямой  $AE$  до штрихпунктирной линии на рис. 2). Если расстояние  $CO > K_a * D_{\min}$ , то вершина  $C$  остается в списке вершин скелета и делит таким образом ветвь  $A, B, C, D, E$  на две ветви. Далее процедура аппроксимации повторяется для каждой из получившихся ветвей. Если же расстояние  $CO \leq K_a * D_{\min}$ , то вся ветвь заменяется одним прямым ребром с концами в точках  $A$  и  $E$ , и все вершины ветви за исключением концевых удаляются из скелета. Таким образом проводится аппроксимация всех ветвей скелетного графа.

Отметим, что в [10] коэффициент аппроксимации выбирался приблизительно, априорно.

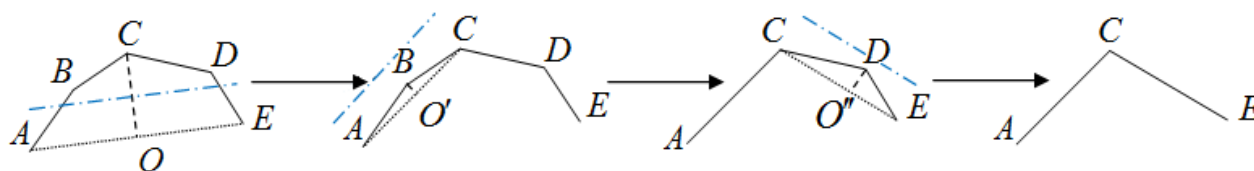


Рис. 2: Определение степени кривизны ветви при аппроксимации скелета

**Склейка.** Идею склейки внутренних вершин скелета можно кратко описать следующим образом: каждое ребро скелета с нетерминальными вершинами, такое, что расстояние между вершинами достаточно мало, считается связующим и заменяется одной внутренней вершиной — узлом. Положение нового узла рассчитывают так, что восстановленный по полученному скелету силуэт отличается от исходной фигуры не более чем на заданную величину — параметр стабилизации скелета [13], который в данной работе рассматриваться не будет.

На рис. 3 показан процесс получения устойчивого скелета для бинарного изображения.

Таким образом, задача данной работы — экспериментальное исследование влияния коэффициентов регуляризации и аппроксимации на топологию скелета и выработка рекомендаций по определению адекватных значений.

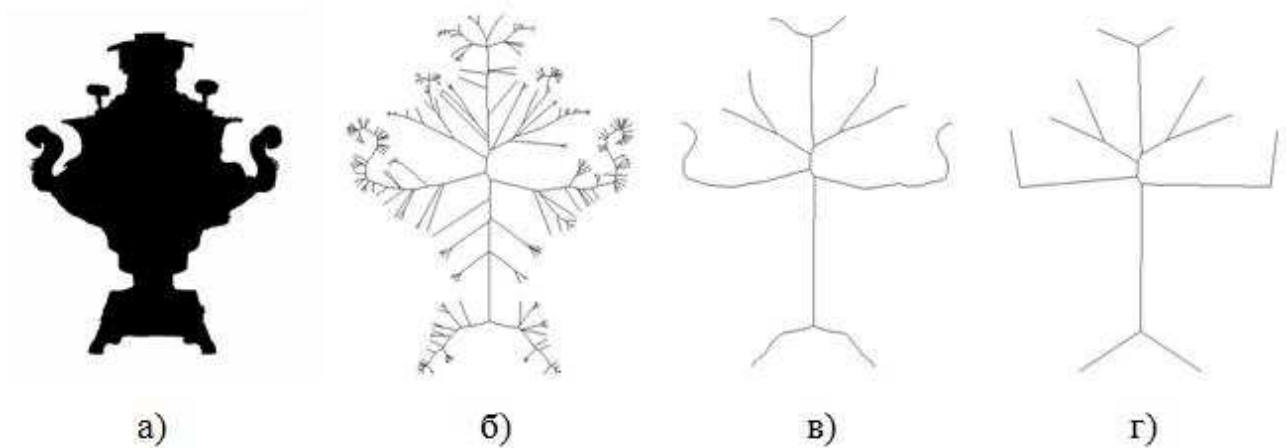


Рис. 3: Исходное изображение (а), его скелет (б), скелет после регуляризации (в), регуляризованный скелет после аппроксимации (г)

### Диаметр минимальной описанной вокруг скелета окружности как масштабный множитель в задаче аппроксимации

Как указывалось выше, коэффициент аппроксимации задает, какую величину относительно диаметра минимальной описанной вокруг скелета окружности  $D_{\min}$  взять в качестве порогового значения при определении степени изгиба ветви. Минимальная описанная вокруг скелета окружность (также известная как минимальная покрывающая окружность) представляет собой окружность минимального диаметра, содержащую все вершины заданного исходного множества в евклидовом пространстве [14]. Вычисление диаметра минимальной описанной вокруг скелета окружности является нетривиальной задачей, некоторые из известных решений которой представлены далее.

1. Метод ограничивающей сферы Риттера. Его идея состоит в следующем: случайным образом выбирается вершина  $x$  из исходного множества  $P$  и наиболее удаленная от нее вершина  $y$ . Затем находится наиболее удаленная от вершины  $y$  вершина  $z$ , и отрезок, соединяющий эти вершины, объявляется начальным искомым диаметром сферы с центром в середине данного отрезка. Далее, если нет вершины  $p$ , лежащей вне ограничивающей сферы, сфера на текущем шаге принимается за искомую. Иначе она расширяется так, чтобы охватить сферу на предыдущем шаге и вершину  $p$ . Процесс продолжается, пока не останется ни одной вершины снаружи сферы. Сложность данного метода составляет  $O(nd)$  (где  $n$  — число исходных вершин,  $d$  — число измерений), что довольно эффективно. Но в то же время, метод дает на 5%~20% большее значение относительно оптимума [15].
2. Метод скачущего пузыря. При обнаружении очередной вершины  $p$  вне ограничивающей сферы (пузыря) центр сферы сдвигается в направлении  $p$  и одновременно увеличивается радиус  $r$ . Причем рост  $r$  осуществляется таким образом, чтобы исключить возможность превышения оптимального значения. Сложность данного метода составляет  $O(nd) + O(d/\varepsilon^2)$  (где  $n$  — число исходных вершин,  $d$  — число измерений,  $\varepsilon$  — точность вычисления результата), при этом обеспечивается высокоточный результат. Наиболее простой вариант данного алгоритма выполняется за  $O(nd)$  и дает на 1%~2% большее значение относительно оптимума [16].

Несмотря на привлекательность второго из описанных подходов, в нашем распоряжении имеется мало информации касательно конкретной реализации алгоритма. Поэтому для решения задачи вычисления диаметра минимальной описанной вокруг скелета окружности предлагаются следующие методы:

1. Замена значения диаметра минимальной описанной вокруг скелета окружности  $D_{\min}$  значением расстояния между двумя наиболее удаленными вершинами графа  $d_{\max}$ . Наиболее удаленные вершины находятся с помощью перебора по всем вершинам с исключением просмотренных из дальнейшего рассмотрения. Сложность метода —  $O(n^2)$ . Очевидно, что диаметр окружности  $D_{\min}$  всегда будет больше либо равен  $d_{\max}$ , поскольку любое расстояние внутри окружности меньше или равно ее диаметру. Проиллюстрируем это рис. 4, где показан скелетный граф с вершинами  $A, B, C, D, E$ . Максимальное расстояние  $d_{\max}$  между вершинами графа  $A$  и  $D$ , отмеченное красным штрихпунктиром, меньше диаметра  $D_{\min}$ , обозначенного синим пунктиром. Если бы в графе существовала вершина  $A'$ , то максимальное расстояние  $d_{\max}$  было бы равно  $D_{\min}$ .

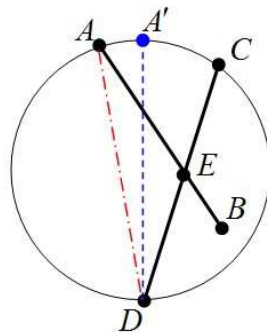


Рис. 4: Иллюстрация различия величин минимальной описанной вокруг скелета окружности  $D_{\min}$  и расстояния между двумя наиболее удаленными вершинами графа  $d_{\max}$

Таким образом, данный метод дает некоторую погрешность при определении масштаба фигуры, а также менее эффективен, но прост в реализации и может использоваться как временная замена другим методам.

2. Метод последовательных приближений для вычисления минимальной описанной вокруг скелета окружности  $D_{\min}$ . Идея вычисления диаметра по данному методу: находится выпуклый многоугольник, содержащий все точки скелета, после чего итерационно вычисляются координаты центра и радиус описываемой окружности, пока не будет достигнута некоторая заданная точность  $\varepsilon$ .

*Алгоритм вычисления диаметра методом последовательных приближений*

- (a) По методу Джарвиса [17] определяется последовательность вершин  $V_{\text{hull}}$  скелета, образующих выпуклую оболочку многоугольника, содержащего все вершины  $V$  этого скелета, а именно:
  - i. Проходом по всем вершинам определяется номер левой нижней вершины  $v_1$  множества  $V$ .
  - ii.  $v_1$  берется в качестве начальной вершины, добавляется во множество  $V_{\text{hull}}$  и исключается из множества  $V$ .
  - iii. Текущей вершиной  $v_c$  устанавливается  $v_1$ .
  - iv. В качестве следующей вершины  $v_n$  выбирается вершина, не входящая в оболочку.

- v. Далее осуществляется проход по оставшимся вершинам  $v_i$  множества  $V$ : вычисляется псевдоскалярное произведение  $m_{ps}$  векторов, построенных на вершинах  $v$  и  $v_n$ , а также на  $v$  и  $v_i$ . В отличие от скалярного произведения знак псевдоскалярного произведения позволяет отследить, положительный или отрицательный угол составляют друг с другом вектора на плоскости. В случае если заданы 2 вектора  $a = (a_1, a_2)$  и  $b = (b_1, b_2)$ , их псевдоскалярное произведение равно определителю матрицы  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ . Когда  $m_{ps}$  становится меньше или равно 0, вершиной  $v_n$  устанавливается  $v_i$ .
  - vi. Вершина  $v_n$  добавляется во множество  $V_{\text{hull}}$  и исключается из множества  $V$ .
  - vii. Текущей вершиной  $v_c$  устанавливается  $v_n$ .
  - viii. Если  $v_c$  — это  $v_1$ , то выпуклая оболочка  $V_{\text{hull}}$  с  $n$  вершинами найдена, иначе переход на шаг iv.
- (б) Если оболочка состоит из 1 вершины, то диаметр равен 0.
  - (в) Иначе выбирается любая вершина  $v_{sa}$  оболочки  $V_{\text{hull}}$  и перебором с вычислительной сложностью  $O(n)$  определяется максимально удаленная от нее вершина  $v_{sb}$ .
  - (г) Аналогичным перебором определяется максимально удаленная от  $v_{sb}$  вершина  $v_{sc}$  и находится значение расстояния между  $v_{sb}$  и  $v_{sc}$  —  $d_{\text{max}}$ .
  - (д) Центром  $p_0$  искомой окружности устанавливается середина отрезка, соединяющего  $v_{sb}$  и  $v_{sc}$ .
  - (е) Начальный шаг  $step$  устанавливается  $0,2 * d_{\text{max}}$ .
  - (ж) Перебором среди вершин оболочки  $V_{\text{hull}}$  находится вершина  $p_{l_{\text{max}0}}$ , наиболее удаленная от  $p_0$ , а расстояние до нее становится текущим радиусом искомой окружности  $r_0$ .
  - (з) Далее координаты центра искомой окружности определяются по формуле:  $p_{i+1} = p_i + v * (step / ||v||)$ , где  $p_i$  — текущий найденный центр искомой окружности,  $v$  — вектор с началом в вершине  $p_i$  и концом в наиболее удаленной от нее вершине  $p_{l_{\text{max}i}}$ . Таким образом,  $p_i$  сдвигается в направлении вершины  $p_{l_{\text{max}i}}$  на расстояние  $step$ .
  - (и) Перебором среди вершин оболочки  $V_{\text{hull}}$  находится вершина  $p_{l_{\text{max}(i+1)}}$ , наиболее удаленная от  $p_{i+1}$ , и расстояние до нее  $r_{i+1}$ .
  - (к) Если  $r_{i+1} \geq r_i$ , то шаг  $step$  уменьшается в 2 раза.
  - (л) Если  $step < \varepsilon$ , то  $r_{i+1} * 2$  — искомый минимальный диаметр, а  $p_{i+1}$  — искомый центр описанной окружности, иначе переход к п. (з).

Вычислительная сложность данного метода  $O(nd/\varepsilon)$  при рассмотрении всех вершин скелета и  $O(hn) + O(hd/\varepsilon)$  — при использовании алгоритма Джарвиса для построения выпуклой оболочки  $V_{\text{hull}}$  (где  $n$  — число исходных вершин,  $h$  — число вершин в оболочке и  $h \ll n$ ,  $d$  — число измерений,  $\varepsilon$  — точность вычисления результата).

3. Метод описания данных опорными векторами (Support Vector Data Description — SVDD) с линейным ядром [18] позволяет построить гиперболу (на плоскости — окружность) вокруг объектов (вершин скелета). Вычислительная сложность  $O(n^3)$ . Второй и, особенно, третий методы более трудоемки, чем первый, но дают более точные значения диаметра минимальной описанной вокруг скелета окружности, при этом метод последовательных приближений представляет компромисс между точностью результата и скоростью выполнения.

## Экспериментальные исследования параметров

**Параметр регуляризации.** С целью определения зависимости числа ребер скелетного графа от значения коэффициента регуляризации строились графики для скелетов

изображений разных классов. Варьируемые значения коэффициента регуляризации менялись в интервале от 1 до 100 с шагом 1. Выбор верхнего значения коэффициента объясняется тем предположением, что для изображений с разрешением  $600 \times 800$  евклидово расстояние между самым значительным шумовым выбросом на границе фигуры и незашумленной границей не будет превышать 100.

Изображения двух классов фигур, взятых для примера, представлены на рис. 5.



Рис. 5: Изображения двух классов фигур для проведения экспериментов с параметрами регуляризации и аппроксимации

На рис. 6 приводятся графики зависимости числа ребер скелетного графа от значения коэффициента регуляризации (он отвечает за удаление шумовых вершин из скелета). Числа в «легенде» диаграммы показывают значение исследуемой величины (количество ребер) для соответствующих графиков при коэффициенте регуляризации, равном 100. Рисунок демонстрирует, что вид графиков для изображений одного класса практически одинаков и графики изображений одного класса располагаются ближе друг к другу, чем графики другого. Предполагаем, что данное наблюдение можно использовать в задачах классификации изображений с небольшим количеством хорошо отделимых друг от друга классов. Также на рисунке наблюдаются интервалы стабилизации числа ребер, характерные для каждого из классов.

Про поведение графиков в общем можно сказать, что они показывают стремительное уменьшение числа ребер при малых значениях параметра регуляризации. При дальнейшем его увеличении изменение количества уже не столь существенно.

Отдельный интерес представляет собой зависимость параметра регуляризации от масштаба изображения (величины диаметра описанной около скелета окружности). Наблюдения показывают, что для одинаковых изображений разной величины значение адекватного коэффициента регуляризации пропорционально масштабу изображения, что представляется логичным, исходя из смысла коэффициента. Поэтому при решении задач классификации изображений будет разумно предварительно масштабировать все скелеты изображений, которые надо сравнивать между собой, приводя диаметры минимальных описанных около них окружностей к некоторой взятой за единицу величине или к значению диаметра минимальной описанной около скелета окружности одного из изображений.

**Параметр аппроксимации.** На рис. 7 представлены графики зависимости числа ребер скелетного графа от значения коэффициента аппроксимации. В «легенде» диаграммы приведены значения исследуемой величины (количество ребер) для соответствующих графиков при коэффициенте аппроксимации, равном 0,03. Видно, что количество ребер в скелете при изменении коэффициента аппроксимации достаточно быстро становится постоянным. Также стоит отметить, что и здесь графики для изображений одного класса изменяются примерно одинаково.

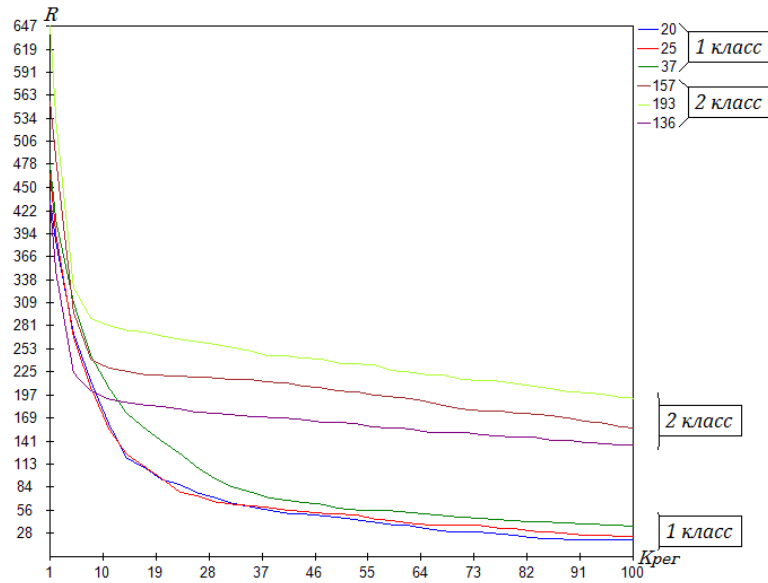


Рис. 6: Графики зависимости числа ребер скелетного графа от значения параметра регуляризации

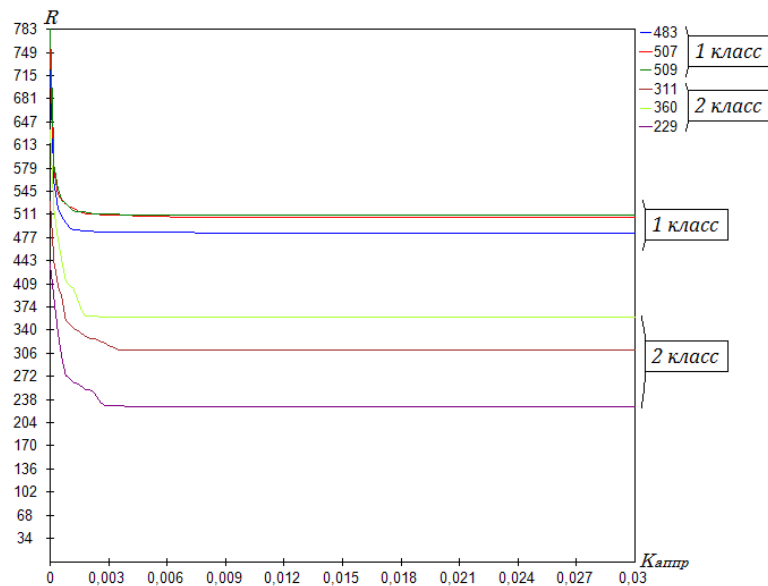


Рис. 7: Графики зависимости числа ребер скелетного графа от значения параметра аппроксимации

**Совместный анализ параметров.** Для исследования зависимости количества ребер от двух коэффициентов при их одновременном изменении был разработан специальный программный комплекс, позволяющий в интерактивном режиме наблюдать результат стабилизации скелета при заданных параметрах аппроксимации и регуляризации (рис. 8).



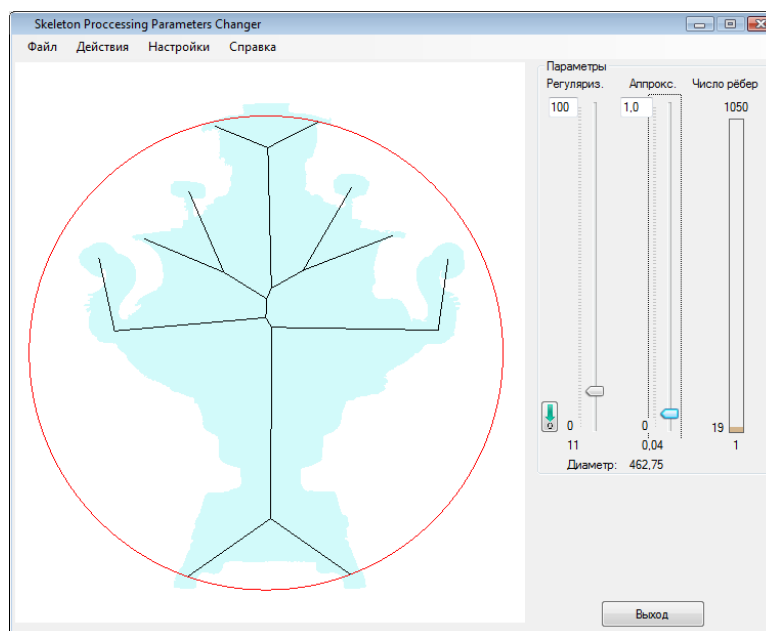


Рис. 8: Интерфейс модуля программного комплекса для исследования параметров стабилизации скелета

Для тестового изображения был построен график зависимости числа ребер скелетного графа от значений коэффициентов аппроксимации и регуляризации (рис. 9). Наши наблюдения показали, что для задач распознавания изображений по их скелетным графам предпочтительно выбирать значения параметров, обеспечивающих минимальное число ребер, достаточное для стабильного описания скелета. Это соответствует внутреннему «плато» на профиле изменения количества ребер. Из графика хорошо видно, что одно и то же число ребер обеспечивается достаточно широким диапазоном варьируемых параметров, которое можно назвать, по терминологии, принятой в [11], интервалом стабилизации. Из всего интервала мы рекомендуем выбирать наименьшие по величине значения параметров.

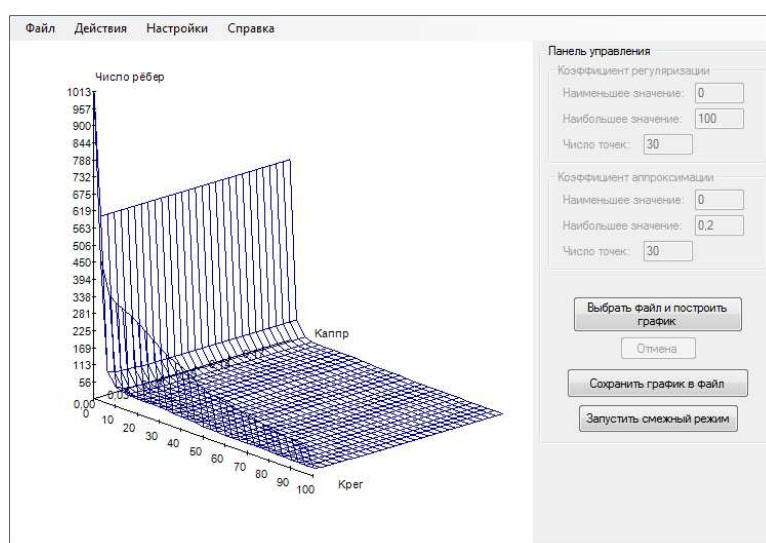


Рис. 9: График зависимости числа ребер скелетного графа от значений коэффициентов аппроксимации и регуляризации

## Выводы

В работе сделаны первые шаги к теоретическому исследованию и выработке алгоритма по определению адекватных значений параметров регуляризации и аппроксимации скелетных графов бинарных изображений. В дальнейшем планируется построить полностью автоматическую версию алгоритма и применить ее для задач классификации на основе парного выравнивания цепочек скелетных примитивов [12]. Кроме того, в простейших задачах с небольшим количеством классов, хорошо отличающихся по сложности скелета, сами подобранные значения коэффициентов могут играть роль дескрипторов.

## Литература

- [1] *Blum H.* A transformation for extracting new descriptors of shape // *Models for the Perception of Speech and Visual Form*. MIT Press, 1967. Pp. 362–380.
- [2] *Choi S. W., Lee S. W.* Stability analysis of medial axis transform under relative Hausdorff distance // *15th International Conference on Pattern Recognition Proceedings*. IEEE, 2000. Vol. 3. Pp. 135–138.
- [3] *Домакина Л. Г.* Регуляризация скелета для задачи сравнения формы // *Математические методы распознавания образов: 14-я Всероссийская конференция. Сб. докладов*. Владимирская обл., Суздаль, 21–26 сентября 2009 г. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 342–345.
- [4] *Shaked D., Bruckstein A. M.* Pruning medial axes // *Computer Vision and Image Understanding*, 1998. Vol. 69, no. 2. Pp. 156–169.
- [5] *Местецкий Л. М.* Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: ФИЗМАЛИТ, 2009. 288 с.
- [6] *Ogniewicz, R.* Automatic medial axis pruning by mapping characteristics of boundaries evolving under the euclidean geometric heat flow onto voronoi skeletons. Harvard Robotics Laboratory Technical Report, 1995. Pp. 95–114.
- [7] *Attali D., di Baja G. S., and Thiel E.* Skeleton simplification through non significant branch removal // *Image Processing and Communications 3.3-4*, 1997. Pp. 63–72.
- [8] *Местецкий Л. М., Рейер И. А.* Непрерывная гранично-скелетная модель дискретного изображения с контролируемой точностью аппроксимации // *Доклады XI Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов» (ММРО-11)*. Москва, 2003. С. 367–371.
- [9] *Жукова К. В., Рейер И. А.* Параметрическое семейство базовых скелетов многоугольной фигуры // *J. Machine Learning and Data Analysis*, 2012. Т. 1. С. 4.
- [10] *Рогов А. А., Быстров М. Ю.* Структурное распознавание бинарных изображений с использованием скелетов // *Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция. Сб. докладов*. Петрозаводск, 11–17 сентября 2011 г. М.: МАКС Пресс, 2011. С. 420–423.
- [11] *Макарова Е. Ю.* Классификация лекарственных растений по форме листа на основе скелетного представления // *Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция. Сб. докладов*. Петрозаводск, 11–17 сентября 2011 г. М.: МАКС Пресс, 2011. С. 412–415.
- [12] *Кушнир О. А., Середин О. С.* Функция парного сравнения скелетных графов, заданных цепочками примитивов. // *Известия ТулГУ. Сер. Технические науки*. Тула: Издательство ТулГУ, 2013. Вып. 2. С. 197–207.
- [13] *Домакина Л. Г., Охлопков А. Д.* Изоморфные скелеты растровых изображений // *Тр. 18-й межд. конференции ГРАФИКОН*, 2008.
- [14] *Elzinga J., Hearn D. W.* The minimum covering sphere problem // *Management Science*, 1972. Vol. 19, Issue 1. Pp. 96–104.

- [15] *Ritter J.* An efficient bounding sphere // *Graphicsgems* / Ed. Andrew S. Glassner. Boston, MA: Academic Press, 1990. Pp. 301–303.
- [16] *Tian B.* Bouncing Bubble: A fast algorithm for Minimal Enclosing Ball problem // *Scholarly Essay*, 2012. 21 p.
- [17] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы. Построение и анализ. М.: Вильямс, 2005. 1296 с.
- [18] *Tax D.* One-class classification; Concept-learning in the absence of counterexamples. Ph.D thesis. Delft University of Technology, ASCI Dissertation Series, 2001. 146 p.