

Симметризация точек изображения, заданных статистическими выборками*

А. Н. Каркищенко¹, В. Б. Мнухин²

¹karkishalex@gmail.com; ²mnukhin.valeriy@mail.ru

Южный Федеральный Университет, Россия, г. Ростов-на-Дону 344006,
ул. Большая Садовая, 105/42

Работа посвящена построению отражательно и вращательно симметричных конфигураций точек изображения по заданным, но не обладающим этим свойством точкам, про которые известно, что они должны быть симметричны. Данная задача называется задачей симметризации и находит многочисленные применения. В предыдущих работах авторов рассматривались методы ее решения при условии, что каждая точка задана некоторой оценкой своего положения, которое может не совпадать с истинным. Были предложены решения для случаев отражательной и вращательной симметрии с разной степенью априорной неопределенности. Оптимальность получаемых решений выражалась в том, что симметризация достигалась минимальным отклонением «симметризованных» точек от первоначальных положений по евклидовой метрике. В отличие от предшествующих публикаций в данной работе мы рассматриваем более общий случай, когда точки задаются статистическими выборками координат. При этом требуется, соответственно, «статистическое» понимание оптимальности решений. Предлагаются методы построения по статистическим выборкам гарантированно симметричных конфигураций, оптимальных в том смысле, что они обладают наибольшей плотностью вероятности появления. Показано, что эти задачи сводятся к стандартной постановке задачи минимизации в пространстве с метрикой Махаланобиса. Предлагается также нормированная мера симметричности исходных статистических данных. Для иллюстрации методов симметризации приводятся результаты моделирования.

Ключевые слова: симметризация; отражательная симметрия; вращательная симметрия; характерные точки; мера симметричности

Symmetrization of the image points defined by statistical sampling*

A. N. Karkishchenko, V. B. Mnukhin

Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don 344006, Russia

The paper is devoted to the methods of constructing reflectionally and rotationally symmetrical configurations of characteristic points in an image calculated from a certain set of given points that do not possess this property. The problem has many applications and is called the problem of symmetrization. In their previous studies, the authors examined the methods for its solution provided that each point analyzed is given with some estimate of its position, which may not coincide with the true one. The solutions have been proposed for the cases of reflectional and rotational symmetry with varying degrees of *a priori* uncertainty. Optimality of the solutions is in the fact that symmetrization is achieved in a minimum Euclidean metric deviation of “symmetrized” points from the original locations.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 13-07-00327-а и № 13-07-13112-офи_м_РЖД.

In contrast to previous publications, in this paper, the more general case is considered when the points are specified by statistical samples of coordinates of their possible position. It requires, respectively, the “statistical” understanding of the optimality of solutions. Therefore, the methods proposed in this paper, being based on statistical samples, are available for constructing symmetrical configurations of points which are optimal in the sense that they have the highest probability density of appearance. The paper also shows that this problem can be reduced to the standard setting of the minimization problem in a space with Mahalanobis metric. Also, it is proposed normalized (from zero to one) measure to assess the degree of symmetry of the source statistics, which naturally follows from the proposed methods. To illustrate the methods, the results of modeling are given in the article.

Keywords: symmetrization; reflectional symmetry; rotational symmetry; feature points; symmetry measure

Введение

Симметрия играет значительную роль в правильном восприятии как естественных, так и в большей степени искусственно созданных объектов. Практически все объекты в той или иной степени симметричны, либо имеют симметричные части. В последнее время многочисленными усилиями при анализе формы объектов, заданных в оцифрованном виде, были сосредоточены на выявлении симметрии 2D и 3D объектов [9, 6, 7]. Информация о симметрии эффективно используется в многочисленных приложениях — в компактном описании моделей [8], обработке сканированных изображений [11], сегментации изображений [10], установлении соответствия форм [9] и др. Как правило, на «атомарном» уровне методы сводятся к исследованию симметричности так называемых характерных точек, смысл которых зависит от решаемой задачи.

Симметризация может иметь многочисленные приложения. Например, при проектировании формы симметричных объектов исходные данные при проектировании могут не отвечать требованиям симметрии, заложенным в конструкторской документации или присутствующим в некоторой идеальной модели. Ручная корректировка данных с целью приведения их к «симметричному» виду очень затратна по времени, громоздка по исполнению и практически нереализуема для крупномасштабных моделей. Эта проблема оказывается еще более сложной для моделей, в которых симметрия проявляется лишь в определенных положениях или позициях.

Многие задачи могут получить более простое решение в случае явно симметричных изображений. Так, качество автоматического распознавания изображений может быть улучшено благодаря предварительной симметризации повторяющихся элементов рассматриваемого объекта. Симметризация может также привести к снижению уровня шума и повысить производительность алгоритмов сжатия изображений. В общем случае можно констатировать, что хорошо симметризованный объект легче воспринимается, классифицируется и понимается как человеком, так и машинными алгоритмами.

Суть проблемы симметризации состоит в том, что локализация точек на изображении всегда осуществляется с некоторой погрешностью, величина которой зависит от многих факторов — используемого алгоритма локализации, качества изображения в целом, зашумления в области, содержащей локализуемую точку и др. Как следствие, координаты обнаруженных точек, про которые априори известно, что они симметричны, в реальности этому условию не удовлетворяют. Поэтому целесообразно воспользоваться известной априорной информацией о симметричности точек для уточнения их положения. При этом

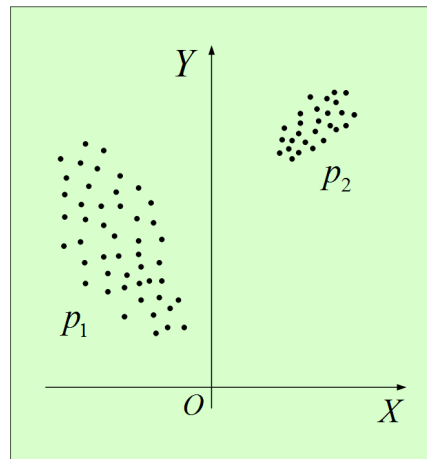


Рис. 1. Статистические выборки для парных точек

само уточнение необходимо осуществлять в некотором смысле наилучшим образом, скажем, симметричность должна достигаться минимальным изменением их положения.

В работах [5, 1] рассмотрено построение симметричных точек в случаях отражательной симметрии, когда каждая точка задается единственным образом. В работе [2] рассмотрено использование симметризации характерных точек для более точной локализации точек, описывающих лицо человека. Задача связана с тем, что точность детекции и распознавания лиц существенно зависит от точности определения центров зрачков на лице, положение которых отвечает естественной симметрии. Это же относится и к другим точкам, на основе которых осуществляется сегментация изображения лица.

Более сложная задача, связанная с искусственной симметризацией характерных точек, возникает в том случае, если сами точки задаются не одной локализованной точкой, а некоторой выборкой. Такая выборка может быть получена при многократном применении одного или разных алгоритмов локализации при различных начальных условиях — различных по размерам и форме областей, содержащих характерную точку, разных сочетаниях параметров алгоритма, различающихся в мелких деталях изображений (например, последовательность кадров видеоряда) и др. Можно считать, что оценка математического ожидания такой выборки будет существенно точнее определять истинное положение характерной точки. Симметризация точек в этом случае также может быть осуществлена точнее, но при этом целесообразно учитывать не только оценки математических ожиданий, но также дисперсии и корреляционные моменты координат характерных точек. Ниже предлагается метод, который позволяет решать указанную задачу.

Симметризация отражательно симметричных точек, заданных статистическими выборками

Пусть заданы отражательно симметричные точки с осью симметрии, совпадающей для простоты с осью Oy . Будем считать, что положение каждой точки оценивается статистической выборкой ее возможных положений (рис. 1), так что правдоподобный вывод об истинном положении этой точки может быть сделан на основе анализа такой выборочной совокупности. В простейшем случае за положение точки можно взять оценку математического ожидания, вычисленную по выборке. Однако при этом, очевидно, соответствующие точки не будут располагаться симметрично. Применение к математическим ожиданиям

способа симметризации, описанного, например, в [1], также нельзя рассматривать в данном случае как приемлемое, поскольку не учитываются дисперсии случайных координат и их корреляции. Рассмотрим более точное решение этой задачи, не имеющее указанных недостатков. Для простоты будем считать вначале, что имеются две точки, которые априори должны быть симметричны относительно оси Oy и не лежат на ней. Обозначим их $p_1(x_1, y_1)$ и $p_2(x_2, y_2)$. Эти точки заданы выборками: $\{p_1^1, p_1^2, p_1^3, \dots\}$, $\{p_2^1, p_2^2, p_2^3, \dots\}$. Задача состоит в том, чтобы найти оценки положения характерных точек, так чтобы эти положения были наиболее вероятны (с точки зрения выборок), и при этом они удовлетворяли условию симметричности. Дадим формальную постановку задачи.

Пусть $f_1(x_1, y_1)$ — плотность вероятности появления точки $p_1(x_1, y_1)$, а $f_2(x_2, y_2)$ — плотность вероятности для $p_2(x_2, y_2)$, представленные статистическими выборками. Обозначим через $\mathbf{Z} = (x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2)^T$ случайный вектор, состоящий из координат точек p_1 и p_2 . Естественно считать, что случайные векторы $(x_1 \ y_1)$ и $(x_2 \ y_2)$ независимы, поэтому \mathbf{Z} подчиняется вероятностному распределению $f(\mathbf{Z}) = f_1(x_1, y_1)f_2(x_2, y_2)$. Искомый вектор, описывающий наиболее вероятное положение пары симметричных точек, должен, очевидно, удовлетворять условиям: $-x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Нетрудно заметить, что множество векторов, координаты которых обладают этим свойством, образует «симметричное» подпространство в линейном пространстве R^4 . Обозначим его R_{Sym}^4 . Таким образом, R_{Sym}^4 состоит из векторов вида $(x \ y \ -x \ y)^T$, $x, y \in R$, соответствующих характерным точкам, расположенным симметрично относительно оси ординат. Тогда задача отыскания наиболее вероятного положения симметричных точек формально запишется так:

$$\begin{cases} f(\mathbf{Z}) \rightarrow \max, \\ \mathbf{Z} \in R_{Sym}^4. \end{cases} \quad (1)$$

Как показывают эксперименты [3], выборочные совокупности во многих случаях хорошо аппроксимируются нормальными распределениями:

$$f_1(\mathbf{z}_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C_1|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{m}_1)^T C_1^{-1}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{m}_1) \right\},$$

$$f_2(\mathbf{z}_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C_2|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{m}_2)^T C_2^{-1}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{m}_2) \right\},$$

где $\mathbf{z}_1 = (x_1 \ y_1)^T$, $\mathbf{z}_2 = (x_2 \ y_2)^T$, а $\mathbf{m}_1 = (m_{x_1} \ m_{y_1})^T$, $\mathbf{m}_2 = (m_{x_2} \ m_{y_2})^T$, C_1 и C_2 — математические ожидания и ковариационные матрицы, которые статистически оцениваются по соответствующим выборкам. Введем для удобства матрицу $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда условие принадлежности вектора \mathbf{Z} подпространству R_{Sym}^4 можно записать следующим образом: $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}$, $\mathbf{z}_2 = S\mathbf{z}$ или $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ S\mathbf{z} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{z} = (x \ y)^T \in R^2$. Задача (1) в этом случае принимает вид:

$$f(\mathbf{z}) = f_1(\mathbf{z})f_2(S\mathbf{z}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\sqrt{|C_1| \cdot |C_2|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)^T C_1^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1) + (S\mathbf{z} - \mathbf{m}_2)^T C_2^{-1}(S\mathbf{z} - \mathbf{m}_2) \right] \right\} \rightarrow \max$$

или, что эквивалентно,

$$(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1)^T C_1^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_1) + (S\mathbf{z} - \mathbf{m}_2)^T C_2^{-1}(S\mathbf{z} - \mathbf{m}_2) \rightarrow \min.$$

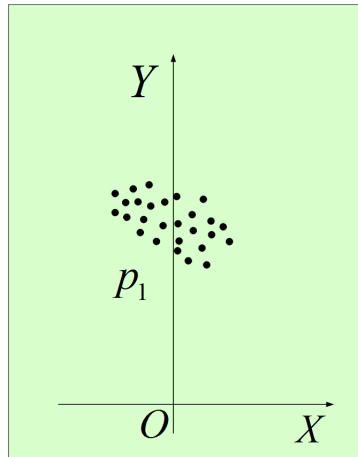


Рис. 2. Статистическая выборка для непарной точки

Решение данной задачи приводит к следующей системе уравнений:

$$(C_1^{-1} + SC_2^{-1}S) \mathbf{z} = C_1^{-1}\mathbf{m}_1 + SC_2^{-1}\mathbf{m}_2. \tag{2}$$

Если $\mathbf{z}^* = (x^* \ y^*)^T$ — решение данной системы, то, следовательно, координаты симметризованных точек будут иметь вид: $p_1^*(x^*, y^*)$ и $p_2^*(-x^*, y^*)$.

Для удобства вычислений отметим, что ковариационные матрицы и матрицы, обратные к ним, имеют вид:

$$C_k = \begin{pmatrix} \sigma_{x_k}^2 & \rho_k \sigma_{x_k} \sigma_{y_k} \\ \rho_k \sigma_{x_k} \sigma_{y_k} & \sigma_{y_k}^2 \end{pmatrix}, \quad C_k^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\rho_k^2)\sigma_{x_k}^2} & -\frac{\rho_k}{(1-\rho_k^2)\sigma_{x_k}\sigma_{y_k}} \\ -\frac{\rho_k}{(1-\rho_k^2)\sigma_{x_k}\sigma_{y_k}} & \frac{1}{(1-\rho_k^2)\sigma_{y_k}^2} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

где $\sigma_{x_k}, \sigma_{y_k}$ — среднеквадратические отклонения, ρ_k — коэффициенты корреляции, а система (2) в явной форме выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}^2} \right) x + \left(-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}} + \frac{\rho_2}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}} \right) y = \\ &= \frac{m_{x_1}}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}^2} - \frac{\rho_1 m_{y_1}}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}} - \frac{m_{x_2}}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}^2} + \frac{\rho_2 m_{y_2}}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}}, \\ &\left(-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}} + \frac{\rho_2}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}} \right) x + \left(\frac{1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{y_1}^2} + \frac{1}{(1-\rho_2^2)\sigma_{y_2}^2} \right) y = \\ &= -\frac{\rho_1 m_{x_1}}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}} + \frac{m_{y_1}}{(1-\rho_1^2)\sigma_{y_1}^2} - \frac{\rho_2 m_{x_2}}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}} + \frac{m_{y_2}}{(1-\rho_2^2)\sigma_{y_2}^2}. \end{aligned} \right.$$

Заметим, что поскольку C_1^{-1} и $SC_2^{-1}S$ — положительно определенные матрицы, то положительно определенной является и главная матрица системы уравнений (2), а поэтому она невырождена и, следовательно, система (2) имеет единственное решение. Однако при некоторых выборках эта матрица может оказаться плохо обусловленной, и значит, решение может содержать значительные погрешности. Общий характер зависимости координат симметричных точек от величин математических ожиданий и дисперсий становится более

понятным, если рассмотреть частный случай некоррелированных случайных величин (эллипсоиды рассеяния точек ориентированы по координатным осям). Полагая $\rho_1 = \rho_2 = 0$, из системы уравнений, представленной в явном виде, получаем:

$$\begin{cases} x = -\frac{\sigma_{x_2}^2}{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} m_{x_1} + \frac{\sigma_{x_1}^2}{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} m_{x_2}, \\ y = \frac{\sigma_{y_2}^2}{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2} m_{y_1} + \frac{\sigma_{y_1}^2}{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2} m_{y_2}. \end{cases}$$

Из данных выражений следует, что $x \in [-m_{x_1}, m_{x_2}]$ и $y \in [m_{y_1}, m_{y_2}]$, причем каждая координата расположена ближе к математическому ожиданию того распределения, у которого соответствующая дисперсия меньше. Данная зависимость очевидна, поскольку чем меньше дисперсия, тем более точно характеризуется область, содержащая выборочные значения. Поэтому оценки математических ожиданий такого распределения вызывают большее «доверие». В частности, если соответствующие дисперсии обоих распределений равны, то $x = (-m_{x_1} + m_{x_2})/2$ и $y = (m_{y_1} + m_{y_2})/2$.

Если на изображении заданы n пар симметричных точек, то описанная процедура симметризации может быть независимо применена последовательно к каждой паре.

Рассмотрим теперь симметризацию «непарных» характерных точек, лежащих на оси Oy подобно тому, как это показано на рис. 2. Допустим, что статистическая выборка, задающая такую точку, описывается плотностью

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}.$$

Для решения достаточно найти моду условной плотности при $x = 0$. Полагая $x = 0$, найдем точку y , в которой плотность достигает максимального значения. Дифференцируя по y и приравнявая производную нулю, после преобразований находим: $y = m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho m_x$. Таким образом, для «непарных» точек соответствующая симметризованная точка имеет координаты $(0, m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho m_x)$.

На рис. 3 представлены результаты построения симметризованных точек на модельных примерах. На левом графике симметризация производилась по выборкам, содержащим по 5 экспериментально полученных точек, в то время как на правом - по 20 точек. В том и другом случае истинные точки имеют координаты $p_1(-1, 1)$ и $p_1(1, 1)$. Точки, найденные по выборке объема 5, — $p_1^*(-0.9752, 0.96203)$ и $p_2^*(0.9752, 0.96203)$, а по выборке объема 20, — $p_1^*(-1.0051, 1.0064)$ и $p_2^*(1.0051, 1.0064)$.

Связь с расстоянием Махаланобиса и мера симметричности

Покажем, что задача «симметризации» статистически заданных нормально распределенных характерных точек эквивалентна задаче отыскания проекции вектора на подпространство в линейном пространстве с метрикой Махаланобиса.

Обозначим, как и раньше, $\mathbf{z}_k = (x_k \ y_k)^T$, $\mathbf{m}_k = (m_{x_k} \ m_{y_k})^T$, $k = 1, 2$. В силу сделанных выше предположений положение точек на плоскости описывается функциями плотности вероятности

$$f_k(z_k) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C_k|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z_k - m_k)^T C_k^{-1} (z_k - m_k) \right\}, \quad k = 1, 2,$$

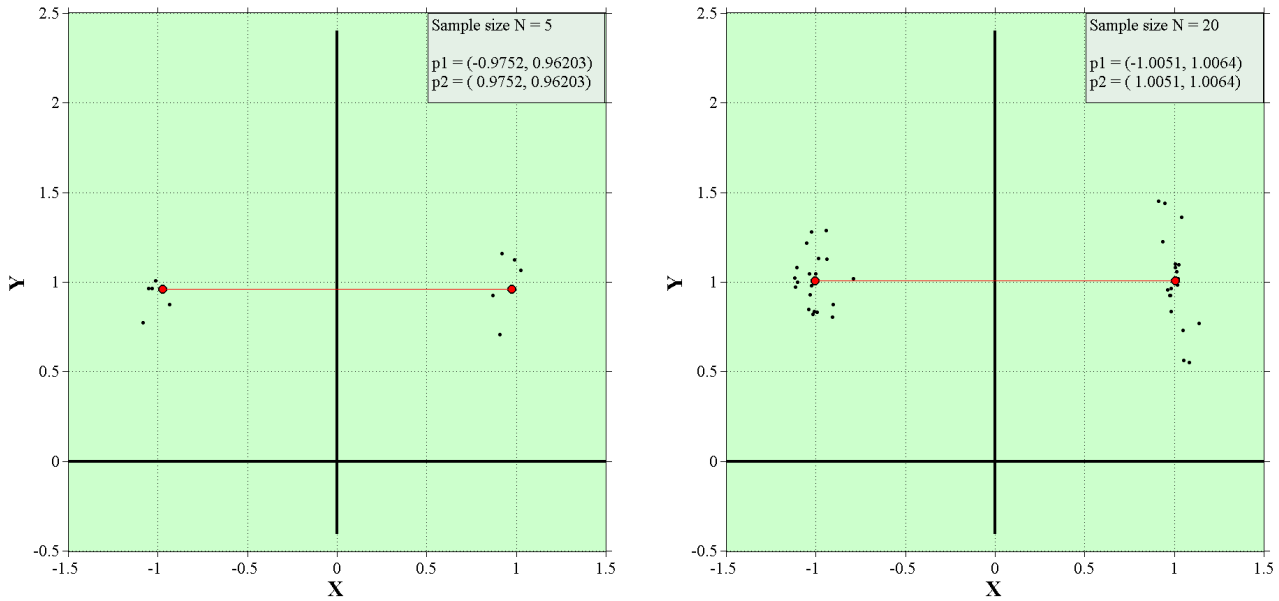


Рис. 3. Отражательная симметризация, основанная на статистических выборках точек

с ковариационными матрицами C_1 и C_2 . Если обозначить

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1^T \ \mathbf{z}_2^T)^T = (x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2)^T, \quad \mathbf{m} = (m_{x_1} \ m_{y_1} \ m_{x_2} \ m_{y_2})^T, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 \end{pmatrix},$$

то совместное распределение пары точек p_1 и p_2 можно записать в компактном виде:

$$f(\mathbf{Z}) = f_1(\mathbf{z}_1) f_2(\mathbf{z}_2) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{|C|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{Z} - \mathbf{m})^T C^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{m}) \right\}.$$

Тогда задача (1) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$\begin{cases} (\mathbf{Z} - \mathbf{m})^T C^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{m}) \rightarrow \min, \\ \mathbf{Z} \in R_{Sym}^4, \end{cases}$$

где R_{Sym}^4 - введенное выше подпространство векторов, состоящее из точек, расположенных симметрично относительно оси Oy .

Минимизируемая функция в последнем выражении представляет собой квадрат расстояния Махаланобиса от точки \mathbf{Z} до точки \mathbf{m} , поэтому поиск минимума сводится к задаче вычисления в пространстве с метрикой Махаланобиса проекции вектора \mathbf{m} на подпространство R_{Sym}^4 , т.е.

$$\mathbf{X}_s = \arg \min_{\mathbf{Z} \in R_{Sym}^4} \|\mathbf{Z} - \mathbf{m}\|_{C^{-1}}. \tag{3}$$

При $C^{-1} = I$ данная формула описывает задачу симметризации в обычном (не статистическом) смысле, т.е. когда обе точки имеют единственные оценки своего положения, задаваемые вектором \mathbf{m} .

Аналогичную форму можно придать и задаче симметризации нормально распределенных характерных точек, лежащих на оси Oy ; в этом случае $\mathbf{Z} = (x \ y)^T$, а $\mathbf{m} = (m_x \ m_y)^T$, а в качестве «симметричного» подпространства выступает подпространство R_{Sym}^2 векторов вида $(0 \ y)^T$, $y \in R$.

Опираясь на данную выше интерпретацию симметризации точек как решения экстремальной задачи, можно достаточно естественным образом ввести меру первоначальной «симметричности» выборок, задающих симметризуемые точки. Рассмотрим пространство R^4 со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_G = (\mathbf{x}, G\mathbf{x})$, где G — положительно определенный самосопряженный оператор. Если P — оператор проектирования на некоторое подпространство $S \subseteq R^4$, то норму проекции некоторого вектора \mathbf{x} на S , т.е. $\|P\mathbf{x}\|_G$, можно рассматривать как меру близости \mathbf{x} к S . Чем больше норма, тем ближе \mathbf{x} к S . При этом для количественного измерения близости более удобно использовать нормированную величину

$$\mu(\mathbf{x}, S) = \frac{\|P\mathbf{x}\|_G}{\|\mathbf{x}\|_G} = \|P\mathbf{x}^0\|_G,$$

где \mathbf{x}^0 — орт вектора \mathbf{x} . Очевидно, $0 \leq \mu(\mathbf{x}, S) \leq 1$. Понятно, что равенство $\mu(\mathbf{x}, S) = 1$ соответствует случаю, когда $\mathbf{x} \in S$.

В нашем случае, учитывая, что $\dim R_{Sym}^4 = 2$, условие $\mathbf{Z} \in R_{Sym}^4$ можно записать в виде $\mathbf{Z} = A\mathbf{u}$, где $A: R^2 \rightarrow R_{Sym}^4$ — оператор, матрица которого имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Следовательно, задача (3) может быть записана в следующей эквивалентной форме:

$$\|\mathbf{Z} - \mathbf{m}\|_{C^{-1}}^2 = \|A\mathbf{u} - \mathbf{m}\|_{C^{-1}}^2 = (A\mathbf{u} - \mathbf{m}, C^{-1}(A\mathbf{u} - \mathbf{m})) \xrightarrow{\mathbf{u} \in R^2} \min.$$

Ее решение имеет вид: $\mathbf{Z} = A(A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} \mathbf{m}$. Заметим, что $(A^T C^{-1} A)^{-1}$ существует, поскольку все входящие в произведение операторы имеют полный ранг. Оператор $A(A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1}$ является оператором ортогонального проектирования на подпространство R_{Sym}^4 со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_{C^{-1}} = (\mathbf{x}, C^{-1}\mathbf{x})$. Следовательно, величину

$$\mu(\mathbf{m}, R_{Sym}^4) = \frac{\|\mathbf{Z}\|_{C^{-1}}}{\|\mathbf{m}\|_{C^{-1}}}$$

можно рассматривать как нормированную меру симметричности исходных точек, задаваемых как среднее по представляющим их выборкам.

Анализ характера изменения меры μ в зависимости от размера выборок позволяет делать некоторые качественные выводы. Простейшие из них состоят в следующем. Если процедура отыскания точек не имеет систематических погрешностей, то можно ожидать, что с увеличением объема выборок математические ожидания будут стремиться к истинным координатам симметричных точек, а следовательно, μ будет сходиться по вероятности к единице. Если же этого не происходит, то либо алгоритм, определяющий положение точек, т.е. формирующий выборки, дает систематические погрешности, либо рассматриваемые точки вопреки предположению не являются симметричными. Систематические ошибки могут возникать, например, в том случае, если формирование исходных условий для определения положения точек зависит от определения положения ряда предыдущих точек. В этом случае помимо инструментальных ошибок, связанных с локализацией точек на зашумленном изображении, происходит последовательное накопление ошибок, вызванных неточностями в локализации предшествующих точек.

Графики на рис. 4 на модельных данных показывают изменение меры симметричности в зависимости от объема выборки при симметризации двух точек. При этом верхний

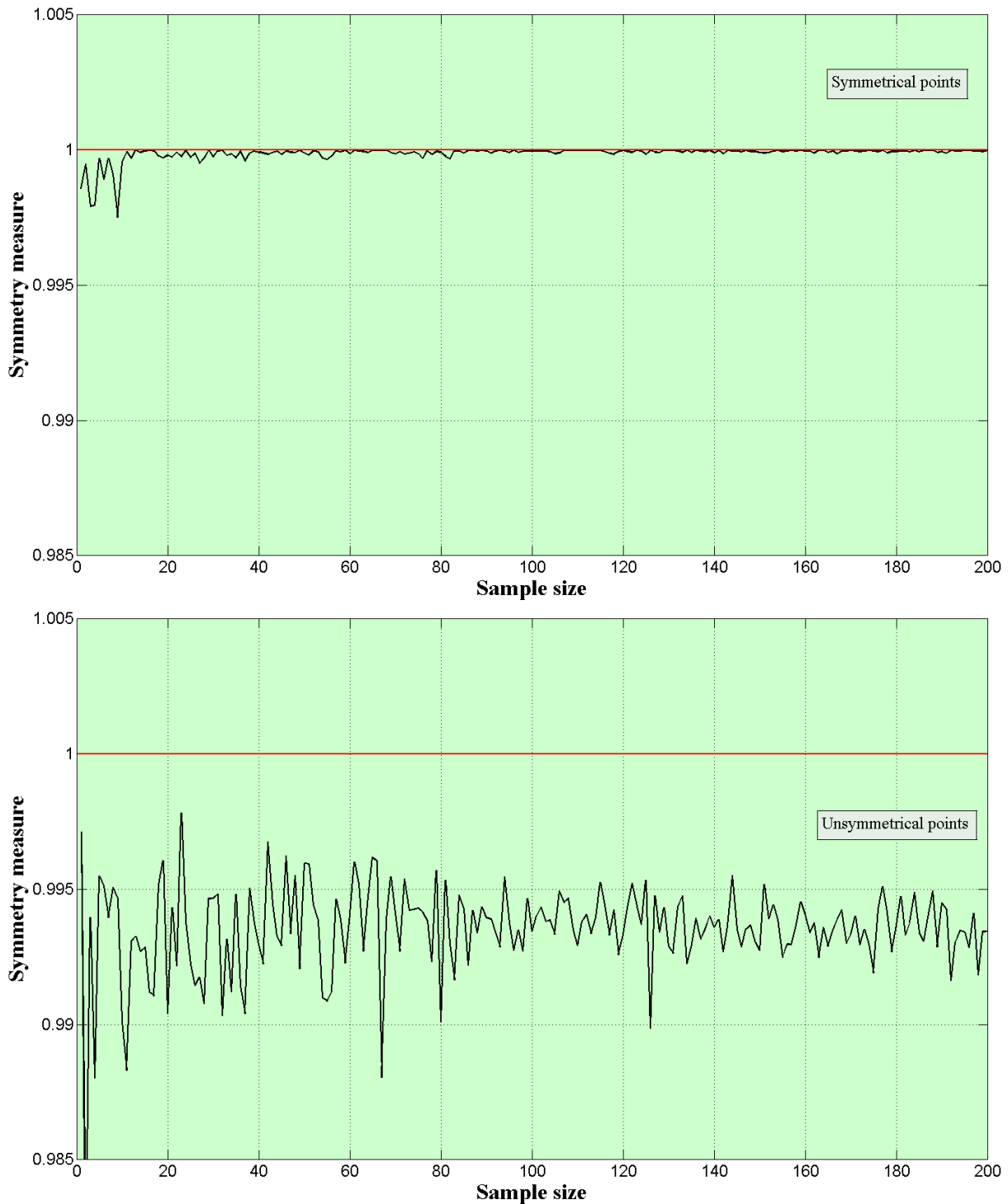


Рис. 4. Сравнение зависимости меры симметричности от объема выборки для симметричных и для несимметричных точек

график соответствует априорно симметричным точкам — $p_1(-1, 1)$, $p_2(1, 1)$, а нижний — несимметричным, $p_1(-1, 1)$, $p_2(1, 1.2)$. В обоих случаях для удобства сравнения масштабы на графиках выбраны одинаковыми. Видно, что в первом случае с ростом числа наблюдений мера μ быстро стремится к единице. В то же время во втором случае статистическая сходимость к единице, как и следовало ожидать, отсутствует.

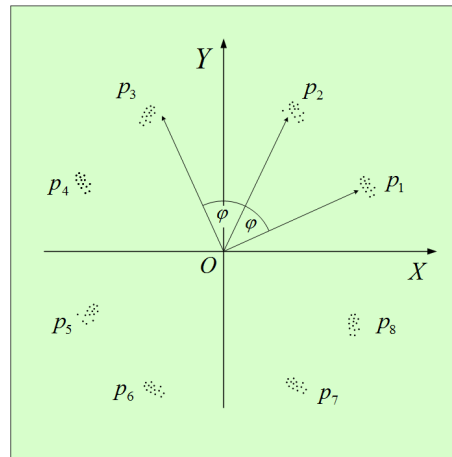


Рис. 5. Статистические выборки вращательно симметричных точек

Вращательная симметризация точек, заданных статистическими выборками

Пусть оценки положения характерных точек заданы статистическими выборками (рис. 6), и при этом априорно известно, что точки должны удовлетворять вращательной симметрии порядка n с центром вращения в начале координат. Найдем оценки положения всех характерных точек так, чтобы эти положения были наиболее вероятны, и при этом они удовлетворяли условию вращательной симметричности.

Пусть $p_k(x_k, y_k)$, $k = 1, \dots, n$, — неизвестные пока точки, которые должны быть вращательно симметричны. Сопоставим каждой точке вектор ее координат: $p_k \leftrightarrow z_k = (x_k \ y_k)^T$. Тогда вращательная симметричность точек означает, что $z_{k+1} = R_\varphi z_k$, $k = 1, \dots, n-1$, где $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ — оператор поворота на угол $\varphi = 2\pi/n$ против часовой стрелки. Отсюда следует, в частности, $z_k = R_\varphi^{k-1} z_1$ для всех k .

Введем более удобное задание точек:

$$\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)^T \leftrightarrow (x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ x_n \ y_n)^T = \mathbf{Z}.$$

Множество таких векторов образует линейное пространство R^{2n} . С учетом этого условие вращательной симметричности можно записать в общем виде для всех k :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ R_\varphi \\ \dots \\ \underbrace{R_{(n-1)\varphi}}_A \end{pmatrix} z_1 = \mathbf{A} z_1.$$

Множество векторов \mathbf{Z} , получающихся при всех $z_1 \in R^2$, образует подпространство R_{Sym} в R^{2n} , причем размерность этого подпространства равна 2, а столбцы матрицы \mathbf{A} образуют базис этого подпространства. Обозначим через $f_k(x_k, y_k)$ плотность вероятности появления точки $p_k(x_k, y_k)$, построенную по статистической выборке. Будем считать, что появления точек статистически независимы, т.е. случайные векторы $z_k = (x_k \ y_k)^T$, $k = 1, \dots, n$, независимы. Тогда случайный вектор $\mathbf{Z} = (x_1 \ y_1 \ \dots \ x_n \ y_n)^T$ описывается плотностью вероятности $f(\mathbf{Z}) = f_1(x_1, y_1) \dots f_n(x_n, y_n)$. При этом искомый вектор должен

принадлежать подпространству R_{Sym} . Это позволяет записать задачу отыскания наиболее вероятного положения вращательно симметричных точек следующим образом:

$$\begin{cases} f(\mathbf{Z}) \rightarrow \max, \\ \mathbf{Z} \in R_{Sym}. \end{cases} \quad (4)$$

Будем далее считать, что выборочные совокупности положений характерных точек подчиняются двумерным нормальным распределениям:

$$f_k(x_k, y_k) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C_k|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{z}_k - \mathbf{m}_k)^T C_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{m}_k) \right\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\mathbf{m}_k = (m_{x_k} \quad y_{y_k})^T$ и C_k — соответственно математические ожидания и ковариационные матрицы, которые получены в результате статистического оценивания по выборке. Тогда задачу (4) можно записать в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n (\mathbf{z}_k - \mathbf{m}_k)^T C_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{m}_k) \rightarrow \min, \\ \mathbf{Z} \in R_{Sym}. \end{cases}$$

Учитывая, что условие $\mathbf{Z} \in R_{Sym}$ эквивалентно выполнению системы равенств $\mathbf{z}_k = R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1$, $k = 1, \dots, n$, последнюю задачу можно переписать так:

$$\sum_{k=1}^n (R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1 - \mathbf{m}_k)^T C_k^{-1} (R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1 - \mathbf{m}_k) \rightarrow \min,$$

или, подробнее, как

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left[(R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1)^T C_k^{-1} R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1 - (R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1)^T C_k^{-1} \mathbf{m}_k - \mathbf{m}_k^T C_k^{-1} R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{m}_k^T C_k^{-1} \mathbf{m}_k \right] = \\ & = \sum_{k=1}^n \left[\mathbf{z}_1^T (R_\varphi^{k-1})^T C_k^{-1} R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1 - 2\mathbf{m}_k^T C_k^{-1} R_\varphi^{k-1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{m}_k^T C_k^{-1} \mathbf{m}_k \right] = \\ & = \mathbf{z}_1^T \underbrace{\left[\sum_{k=1}^n (R_\varphi^{k-1})^T C_k^{-1} R_\varphi^{k-1} \right]}_{(*)} \mathbf{z}_1 - 2 \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{m}_k^T C_k^{-1} R_\varphi^{k-1} \right] \mathbf{z}_1 + \sum_{k=1}^n \mathbf{m}_k^T C_k^{-1} \mathbf{m}_k \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Для отыскания минимума продифференцируем последнее выражение по \mathbf{z}_1 и приравняем производную к нулю. Учитывая, что матрица (*) симметрична, после очевидных преобразований получаем систему уравнений для отыскания уточненных координат точки \mathbf{z}_1 :

$$\left[\sum_{k=1}^n (R_\varphi^{k-1})^T C_k^{-1} R_\varphi^{k-1} \right] \mathbf{z}_1 = \sum_{k=1}^n (R_\varphi^{k-1})^T C_k^{-1} \mathbf{m}_k.$$

Заметим, что если вероятностные распределения положения всех характерных точек невырождены, то данная система имеет единственное решение. Действительно, в силу положительной определенности ковариационных матриц определитель системы отличен от нуля. Однако при плохой обусловленности главной матрицы решения могут содержать значительные ошибки. В этой связи полезно дать нижнюю оценку для модуля определителя системы. Для этого воспользуемся следующим детерминантным неравенством [4]:

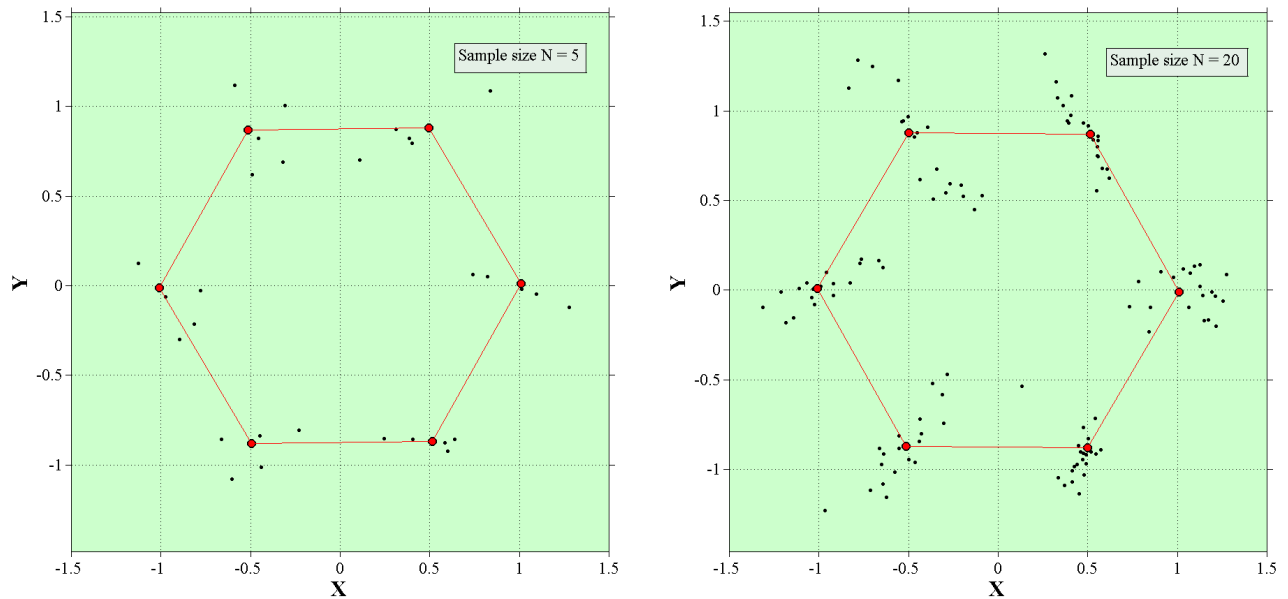


Рис. 6. Вращательная симметризация, основанная на статистических выборках точек

пусть матрицы A_1, \dots, A_n — положительно определенные, и $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Тогда $\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k \right| \geq \prod_{k=1}^n |A_k|^{\alpha_k}$.

Полагая $\alpha_k = \frac{1}{n}$ для всех k и учитывая, что в случае невырожденности вероятностных распределений $|C_k| > 0$, $k = 1, \dots, n$, получим для определителя системы:

$$\left| \sum_{k=1}^n (R_\varphi^{k-1})^T C_k^{-1} R_\varphi^{k-1} \right| \geq n^2 \left(\prod_{k=1}^n |C_k| \right)^{-\frac{1}{n}} > 0.$$

На рис. 6 показаны примеры вращательной симметризации при объеме нормально распределенных выборок равном 5 (слева) и 20 (справа). Для удобства восприятия симметризованные точки изображены в виде вершин правильного многоугольника.

Вращательная симметризация точек, заданных статистическими выборками, с неизвестным центром

Рассмотрим случай, когда вращательно симметричные характерные точки заданы статистическими выборками, но при этом неизвестны координаты центра \mathbf{c} вращательной симметрии (рис. 8). Как и выше, будем считать, что порядок симметрии известен и равен n , а следовательно, имеется n статистических выборок, дающих некоторую информацию об истинном положении точек.

Будем, как и раньше считать, что вектор $\mathbf{Z} = (x_1 \ y_1 \ \dots \ x_n \ y_n)^T$, задающий координаты неизвестных точек $p_k(x_k \ y_k)$, $k = 1, \dots, n$, подчиняется распределению $f(\mathbf{Z}) = f_1(x_1, y_1) \dots f_n(x_n, y_n)$. Пусть, как и выше, $\mathbf{z} = (x_k \ y_k)^T$ — вектор координат точки. Если R_φ — оператор поворота на угол $\varphi = 2\pi/n$, то $\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{c} = R_\varphi(\mathbf{z}_k - \mathbf{c})$, $k = 1, \dots, n-1$. Отсюда получаем $\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{c} = R_{k\varphi}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{c})$ или $\mathbf{z}_{k+1} = R_{k\varphi}\mathbf{z}_1 + (I - R_{k\varphi})\mathbf{c}$, $k = 0, \dots, n-1$.

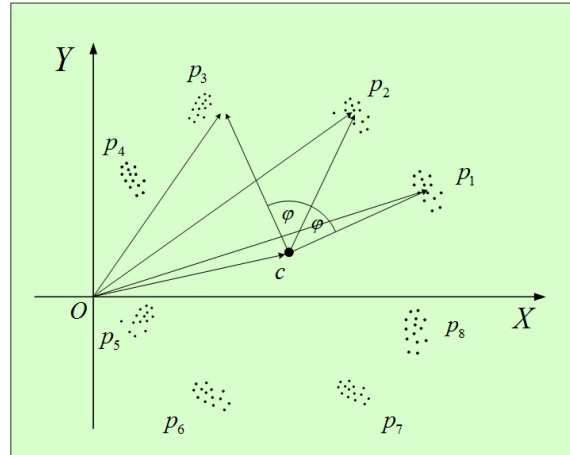


Рис. 7. Статистические выборки вращательно симметричных точек с неизвестным центром

Эти соотношения удобно записать сразу для всех k :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \dots \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ R_\varphi \\ \dots \\ R_{(n-1)\varphi} \end{pmatrix} \mathbf{z}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ I - R_\varphi \\ \dots \\ I - R_{(n-1)\varphi} \end{pmatrix} \mathbf{c}.$$

Если ввести матрицу $B = (I I \dots I)^T$, то последнее равенство можно переписать в матричном виде: $\mathbf{Z} = A\mathbf{z}_1 + (B - A)\mathbf{c}$. Множество векторов \mathbf{Z} , которые получаются при фиксированном \mathbf{c} и всех возможных $\mathbf{z} \in R^2$, обозначим $R_{Sym}(\mathbf{c})$. Таким образом, $R_{Sym}(\mathbf{c})$ является линейным многообразием в R^{2n} , параметрически зависящим от неизвестных координат центра вращательной симметрии.

Тогда задача отыскания наиболее вероятного положения точек вокруг наиболее вероятного положения центра вращательной симметрии имеет вид:

$$\begin{cases} f(\mathbf{Z}) \rightarrow \max, \\ \mathbf{Z} \in R_{Sym}(\mathbf{c}). \end{cases}$$

Пусть

$$f_k(x_1, y_k) = f_k(\mathbf{z}_k) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C_k|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{z}_k - \mathbf{m}_k)^T C_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{m}_k) \right\},$$

где $\mathbf{m}_k = (m_{x_k} \ y_{y_k})^T$ — математическое ожидание, а C_k — ковариационная матрица координат точки $p(x_k, y_k)$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z}) &= f_1(x_1, y_1) \dots f_n(x_n, y_n) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{|C_1| \cdot \dots \cdot |C_n|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (\mathbf{z}_k - \mathbf{m}_k)^T C_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{m}_k) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1^T \ \dots \ \mathbf{m}_n^T)^T$ и введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_n)$; тогда с учетом условия $\mathbf{Z} = A\mathbf{z}_1 + (B - A)\mathbf{c}$ получаем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z}) &= \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{|C_1| \cdot \dots \cdot |C_n|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{m})^T C^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{m}) \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{|C_1| \cdot \dots \cdot |C_n|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot (A\mathbf{z}_1 + (B - A)\mathbf{c} - \mathbf{m})^T C^{-1} (A\mathbf{z}_1 + (B - A)\mathbf{c} - \mathbf{m}) \right\}, \end{aligned}$$

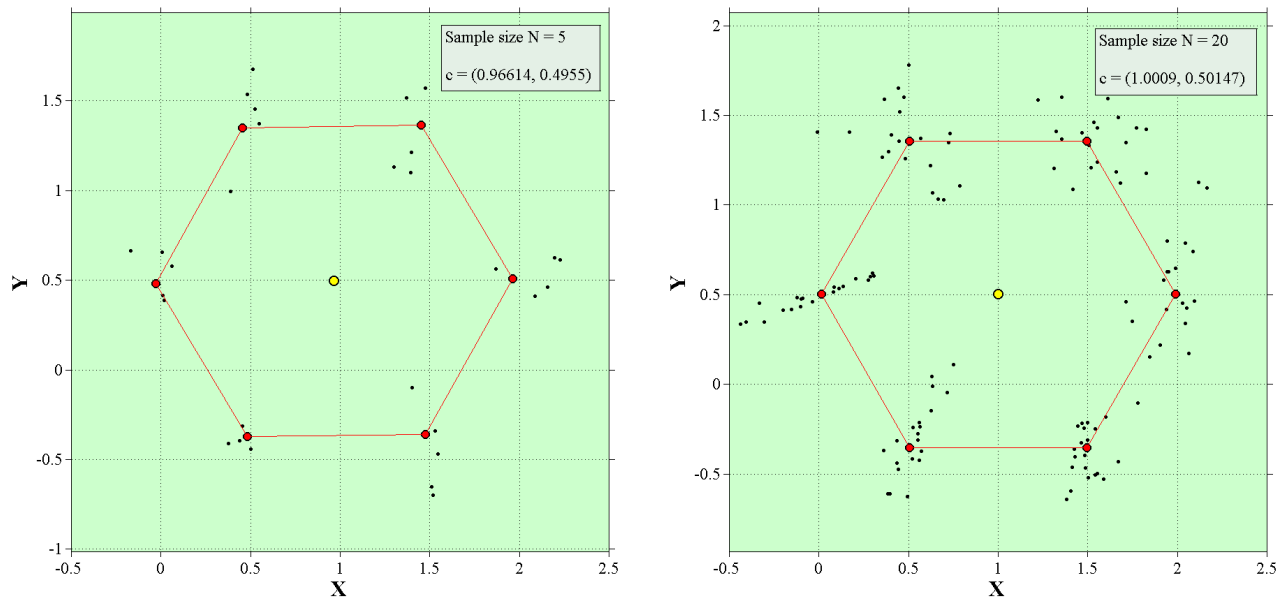


Рис. 8. Вращательная симметризация точек с неизвестным центром вращения

и задача сводится, таким образом, к безусловной минимизации квадратичной формы:

$$\Phi(\mathbf{z}_1, \mathbf{c}) = (\mathbf{A}\mathbf{z}_1 + (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{c} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{z}_1 + (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{c} - \mathbf{m}) \xrightarrow{\mathbf{z}_1, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2} \min .$$

Дифференцируя $\Phi(\mathbf{z}_1, \mathbf{c})$ последовательно по \mathbf{z}_1 и по \mathbf{c} и приравнявая полученные выражения к нулю, после упрощений получаем:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{z}_1 - \mathbf{c}) + \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m} , \\ \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{z}_1 - \mathbf{c}) + \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{c} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m} . \end{cases}$$

Таким образом, если \mathbf{z}_1^* и \mathbf{c}^* — решение последней системы, то координаты симметризованных точек вычисляются по формуле $\mathbf{z}_{k+1}^* = \mathbf{R}_{k\varphi} \mathbf{z}_1^* + (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{k\varphi}) \mathbf{c}^*$, $k = 0, \dots, n - 1$.

На рис. 8 представлены результаты моделирования симметризации вращательно симметричных точек с неизвестным центром симметрии при объемах выборок 5 и 20. При этом для случая выборок объемом 5 (слева) координаты найденного центра $\mathbf{c}^* (0.96614, 0.4955)$, а для выборок объемом 20 (справа), соответственно, — $\mathbf{c}^* (1.0009, 0.50147)$. Истинным положением центра при моделировании была точка $\mathbf{c}^* (1, 0.5)$. Как и выше, симметризованные точки представлены вершинами правильного многоугольника.

Заключение

Симметризация характерных точек изображения относительно отражательной и вращательной симметрии имеет многочисленные приложения, поскольку эти типы симметрии являются наиболее простыми и распространенными. Ранее авторами рассматривались вопросы симметризации точек по отношению к отражательной и вращательной симметрии при различных условиях. При этом всегда считалось, что каждая точка представлена одной единственной оценкой своего истинного положения. Все методы обеспечивали построение гарантированно симметричного положения новых точек при минимальном отклонении от заданных.

В данной работе рассмотрена более общая задача, когда каждая точка задается некоторой выборкой оценок своего положения. Поэтому в такой постановке задача носит в большей степени статистический характер. Предложены методы построения симметричных точек, которые максимизируют вероятность появления точек при гарантированном их симметричном расположении как в случае отражательной, так и вращательной симметрии. Показано, что такая постановка сводится к оптимизационной задаче в «нестатистическом» случае с тем отличием, что минимальное отклонение ищется не в пространстве с евклидовой метрикой, а в пространстве с метрикой Махаланобиса.

Предложен простой способ оценки априорной симметричности исходных данных на основе введенной меры симметричности. Показано, что с ростом объема выборок, задающих симметризуемые точки, мера симметричности стремится к единице в статистическом смысле.

Вместе с тем в данной работе не рассмотрены некоторые важные случаи, а именно: отражательная симметризация относительно произвольной фиксированной оси, а также наиболее полезный с практической точки зрения случай неизвестной оси симметрии. Для случая, когда характерные точки задаются координатами одного, возможно, неточного своего положения, данные задачи были подробно исследованы авторами ранее [1]. Аналогичные рассуждения при задании характерных точек статистическими выборками являются более громоздкой задачей, поскольку в отличие от случая фиксированной оси, когда симметризация пар характерных точек производится независимо, для построения неизвестной оси симметрии и последующей симметризации требуется учет статистической информации обо всех точках одновременно. Авторы предполагают рассмотреть эту и другие связанные с ней задачи в следующей работе.

Отдельным вопросом, заслуживающим особое внимание, является агрегирование в статистических выборках информации о положении точек, полученной из разных источников, о чем упоминалось во введении к статье. Координаты точек, порождаемые различными источниками информации, образуют неоднородные (гетерогенные) выборки, что накладывает дополнительные сложности, связанные с отличающимися статистическими характеристиками элементов неоднородной выборки. В некоторых случаях (например, когда выборку значений координат точек можно разделить на классы с одинаковыми статистическими характеристиками) можно рассчитывать на получение оптимального решения. Поэтому представляется целесообразным корректно распространить методы симметризации также и на случай неоднородных статистических выборок.

Авторы выражают благодарность неизвестным рецензентам за полезные замечания и пожелания, способствовавшие улучшению статьи, а также стимулирующие дальнейшие исследования в данном направлении.

Литература

- [1] Podolak J., Shilane P., Giesen J., Gross M., Guibas L. Example-based 3d scan completion // Symposium on Geometry Processing, 2005. P. 23–32.
- [2] Martinet A., Soler C., Holzschuch N., Sillion F. Accurate detection of symmetries in 3d shapes // ACM Trans. Graph., 2006. Vol. 25(2). P. 439–464.
- [3] Mitra N. J., Guibas L. J., Pauly M. Partial and approximate symmetry detection for 3d geometry // ACM Trans. Graph., 2006. Vol. 25(3). P. 560–568.
- [4] Mitra N. J., Guibas L. J., Pauly M. Symmetrization // ACM Trans. Graph., 2007. Vol. 26(3).

- [5] *Thrun S., Wegbreit B.* Shape from symmetry // 10th IEEE Conference (International) on Computer Vision Proceedings, 2005. P. 1824–1831.
- [6] *Simari P., Kalogerakis E., Singh K.* Folding meshes: Hierarchical mesh segmentation based on planar symmetry // Eurographics Symposium on Geometry Processing Proceedings, 2006. P. 111–119.
- [7] *Karkishchenko A. N., Mnukhin V. B.* Reflective Symmetrization of feature points in images // 11th Conference (International) on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-11-2013) Proceedings. — Samara, 2013. P. 209–212.
- [8] *Каркищенко А. Н., Мнухин В. Б.* Восстановление симметричности точек на изображениях объектов с отражательной симметрией // Машинное обучение и анализ данных, 2013. Т. 1. № 5. С. 619–629.
- [9] *Каркищенко А. Н., Гречухин И. А.* Локализация характерных точек на основе естественной симметрии изображений // Тр. Первой научно-технич. конф. «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте (ИСУЖТ-2012)» — М.: ОАО НИИАС, 2012. С. 261–266.
- [10] *Каркищенко А. Н., Гречухин И. А.* Статистическое распознавание лиц по геометрии характерных точек для систем транспортной безопасности // *Управление большими системами: Сб. тр.* — М.: ИПУ РАН, 2012. Вып. 38. С. 65–77.
- [11] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 2008. 536 с.

References

- [1] *Karkishchenko A. N., Mnukhin V. B.* 2013. Recovery of points symmetry in images of objects with reflectional symmetry. *Machine Learning Data Analysis*. 1(5):619–629.
- [2] *Karkishchenko A. N., Grechukhin I. A.* 2012. Localizing feature points based on natural symmetry of images. *1st Scientific Conference “Intelligent Control Systems for Rail Transport. ISUZHT 2012 Proceedings”* Moscow: JSC NIIAS. 261–266.
- [3] *Karkishchenko A. N., Grechukhin I. A.* 2012. Statistical face recognition on the geometry of the characteristic points for transport safety systems. *Managing Large Systems Proceedings*. Moscow: Institute of Control Sciences. 38:65–77.
- [4] *Prasolov V. V.* 2008. *Problems and theorems in linear algebra*. Moscow: Nauka. 536 p.
- [5] *Karkishchenko A. N., Mnukhin V. B.* 2013. Reflective symmetrization of feature points in images. *11th Conference (International) on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-11-2013) Proceedings*. Samara. 209–212.
- [6] *Martinet A., Soler C., Holzschuch N., Sillion F.* 2006. Accurate detection of symmetries in 3d shapes. *ACM Trans. Graph.* 25(2):439–464.
- [7] *Mitra N. J., Guibas L. J., Pauly M.* 2006. Partial and approximate symmetry detection for 3d geometry. *ACM Trans. Graph.* 25(3):560–568.
- [8] *Mitra N. J., Guibas L. J., Pauly M.* 2007. Symmetrization. *ACM Trans. Graph.* 26(3).
- [9] *Podolak J., Shilane P., Giesen J., Gross M., Guibas L.* 2005. Example-based 3d scan completion. *Symposium on Geometry Processing Proceedings*. 23–32.
- [10] *Simari P., Kalogerakis E., Singh K.* 2006. Folding meshes: Hierarchical mesh segmentation based on planar symmetry. *Eurographics Symposium on Geometry Processing Proceedings*. 111–119.
- [11] *Thrun S., Wegbreit B.* 2005 Shape from symmetry. *10th IEEE Conference (International) on Computer Vision Proceedings*. 1824–1831.