

Восстановление симметричности точек на изображениях объектов с отражательной симметрией*

Каркищенко А. Н.¹, Мнухин В. В.²

¹karkishalex@gmail.com

¹Северо-Кавказский Федеральный Университет; ²Южный Федеральный Университет

В работе предлагается несколько алгебраических методов, которые позволяют уточнить положение характерных точек, описывающих какие-либо объекты на изображении, на основе априорно известной информации об их симметричном расположении. Эти методы называются симметризацией характерных точек. Рассмотрена симметризация точек для случая вертикальной и произвольной симметрии с известными параметрами оси симметрии, а также более общий случай симметризации при неизвестных параметрах осевой симметрии. Рассматриваемые методы дают решение задачи осевой симметризации при минимальном изменении положения характерных точек. **Ключевые слова:** *симметризация, отражательная симметрия, характерные точки, биометрическая идентификация, распознавание лиц.*

Recovery of points symmetry in images of objects with reflectional symmetry*

Karkishchenko A. N.¹, Mnukhin V. V.²

¹North Caucasian Federal University, ²Southern Federal University

In this work, we consider the problem to obtain more accurate information about location of points based on a priori knowledge of their symmetries. Methods to solve this symmetrization problem with respect to vertical and inclined axes of reflectional symmetry are considered jointly with the more general case of reflectional symmetry with respect to an indefinite reflection axis. The methods produce the minimal deformation that enhances approximate symmetries present in a given arrangement of points.

Keywords: *symmetrization, reflectional symmetry, feature points, biometrical identification, face recognition.*

Введение

Симметрия играет значительную роль в правильном восприятии как естественных, так и в большей степени искусственно созданных объектов. В последнее время многочисленные усилия при анализе формы объектов, заданных в оцифрованном виде, были сосредоточены на выявлении симметрии 2D и 3D объектов [1–3]. Информация о симметрии эффективно используется в многочисленных приложениях — в компактном описании моделей [3], обработке сканированных изображений [4], сегментации изображений [5], установлении соответствия форм [1] и др. Как правило, на «атомарном» уровне методы сводятся к исследованию симметричности так называемых характерных точек, смысл которых зависит от решаемой задачи.

В данной работе предлагается ряд методов, которые позволяют уточнить положение характерных точек, описывающих объекты на изображении, на основе известной инфор-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 11-07-00591 и № 13-07-00327.

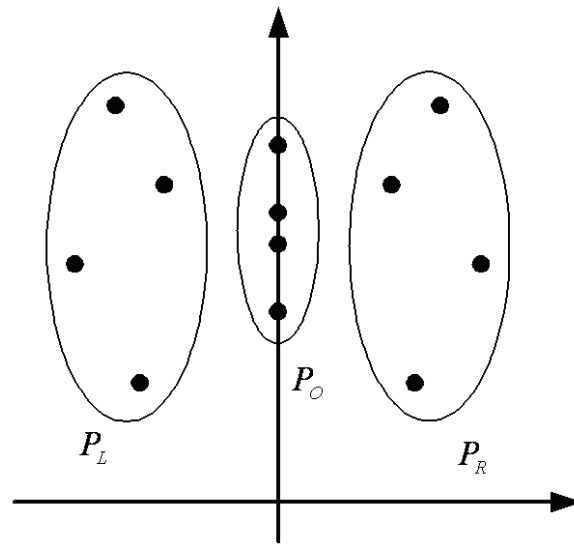


Рис. 1: Симметрия относительно вертикальной оси.

мации об их симметричном расположении. Суть проблемы состоит в том, что локализация точек на изображении всегда осуществляется с некоторой погрешностью, величина которой зависит от многих факторов — используемого алгоритма локализации, качества изображения в целом, зашумления в области, содержащей локализуемую точку и др. Как следствие, координаты обнаруженных точек, про которые априори известно, что они симметричны, в реальности этому условию не удовлетворяют. Поэтому целесообразно воспользоваться известной априорной информацией о симметричности точек для уточнения их положения. При этом само уточнение необходимо осуществлять в некотором смысле наилучшим образом, скажем, симметричность должна достигаться минимальным изменениям их положения.

Одной из наиболее типичных задач, где могут применяться данные методы уточнения «по симметрии», являются задачи биометрического распознавания, в которых правильное определение характерных точек является критическим фактором успешного решения задачи. Здесь достаточно указать на то, что точность детекции и распознавания лиц существенно зависит от точности определения центров зрачков на лице [6]. При этом в задачах идентификации личности, основанных на определении положения характерных точек, заведомо присутствует фактор симметричности, обусловленный симметричностью формы лица анфас [7]. В данных методах определяется, как правило, несколько десятков (в зависимости от метода) характерных точек, большая часть из которых представляет собой пары точек, зеркально симметричных относительно вертикальной оси, либо точки, лежащие непосредственно на оси симметрии.

Постановка и решение задачи при вертикальной осевой симметрии характерных точек

Пусть $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ — множество всех характерных точек, и $p_k = (x_k, y_k)$ — координаты k -той точки. Предположим, что ось симметрии совпадает с осью ординат в прямоугольной системе координат. Условимся нумеровать характерные точки так, что точки $P_R = \{p_1, \dots, p_m\}$ относятся к правой полуплоскости, $P_L = \{p_{m+1}, \dots, p_{2m}\}$ — к левой, а точки $P_O = \{p_{2m+1}, \dots, p_n\}$ лежат на оси симметрии.

Сопоставим с упорядоченным таким образом множеством характерных точек P вектор X размерности $2n$:

$$(p_1, \dots, p_n) \longleftrightarrow (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)^T = X. \quad (1)$$

Множество векторов X образует линейное пространство \mathbb{R}^{2n} . Заметим теперь, что если все характерные точки найдены точно, то, с учетом разбиения на классы P_R, P_L, P_O , должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} x_i &= -x_{m+i}, & i &= 1, \dots, m; \\ y_i &= y_{m+i}, & i &= 1, \dots, m; \\ x_i &= 0, & i &= 2m + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Множество векторов, удовлетворяющих этим условиям, образует n -мерное подпространство в \mathbb{R}^{2n} . Обозначим это подпространство R_{Sym} ; оно состоит из векторов, соответствующих характерным точкам, расположенным симметрично относительно оси ординат. Заметим, что «симметризация» вектора X характерных точек означает построение в R_{Sym} вектора X_s , наименее отклоняющегося от X по евклидовой норме:

$$X_s = \arg \min_{Z \in R_{Sym}} \|Z - X\|.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению ортогональной проекции X_s вектора X на подпространство R_{Sym} .

Пусть Q — матрица оператора ортогонального проецирования на подпространство R_{Sym} , а A — матрица, столбцами которой служат базисные векторы подпространства R_{Sym} . Тогда, как известно ([8], стр. 165),

$$Q = AA^+ = A(A^T A)^{-1} A^T,$$

где A^+ — псевдообратная к матрице A . Для нахождения A^+ заметим, что матрица A имеет следующую блочную структуру:

$$A^T = \begin{pmatrix} I_m & -I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-2m} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где I и 0 — соответственно единичная и нулевая матрицы соответствующих размеров. Тогда, как следует из непосредственных вычислений,

$$Q = \frac{1}{2} I_{2n} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где S — следующая $n \times n$ -матрица:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2m} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тем самым, решение поставленной задачи в общем случае имеет вид

$$X_s = QX. \quad (5)$$

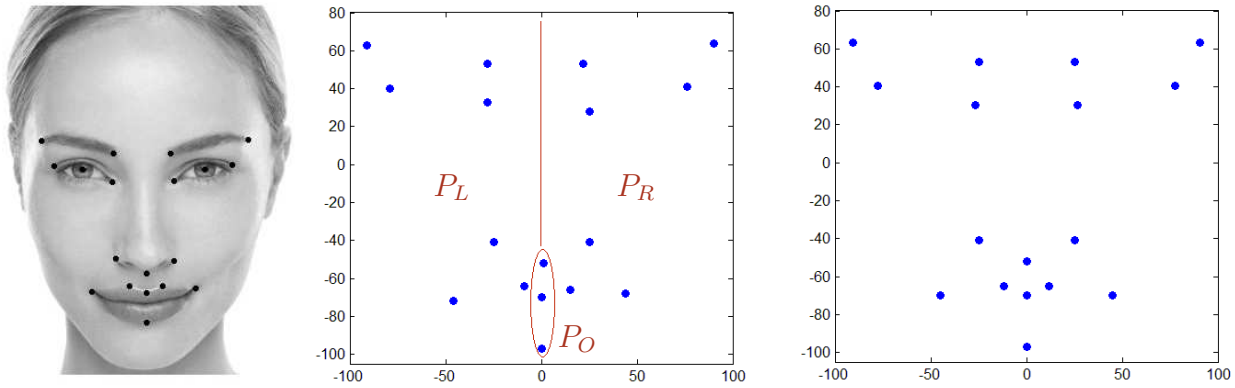


Рис. 2: Пример симметризации относительно вертикальной оси.

Нетрудно видеть, что ортогональное проектирование вектора приводит к простым операциям над координатами характерных точек: в качестве ординаты симметричных точек надо взять среднее арифметическое их ординат, а модули абсцисс равны среднему арифметическому их модулей. Для «осевых» точек их ординаты остаются неизменными, а абсциссы обнуляются.

Результат симметризации системы точек относительно вертикальной оси симметрии с помощью рассмотренного выше метода показан на рис. 2. Его левая часть показывает лицо анфас с отмеченными характерными точками, присутствующее, например, в некоторой базе данных. На средней части рисунка показаны характерные точки, положение которых найдено в результате работы соответствующего алгоритма, например, применяемого в [6]. Как нетрудно заметить, симметрия точек оказывается нарушенной, что затрудняет задачу идентификации образа. В правой части рисунка показан результат симметризации системы характерных точек с помощью рассмотренного выше метода.

Симметризация при произвольной осевой симметрии

Пусть теперь ось симметрии задается уравнением $y = ax + b$, где $a \neq 0$, см. рис. 3. В этом случае задача сводится к предыдущей путем замены координат. А именно, построим новую систему координат $(O'x'y')$, приняв, что ось $O'y'$ совпадает с осью симметрии, начало координат O' совпадает с точкой пересечения оси симметрии и оси Oy , а ось $O'x'$ перпендикулярна оси $O'y'$ и образует правоориентированную систему. Другими словами, система $(O'x'y')$ получается из (Oxy) поворотом последней на некоторый угол φ , как показано на рис. 3. Тогда угловой коэффициент оси симметрии равен $a = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\operatorname{ctg} \varphi$, а её уравнение при $\varphi \neq 0$ можно записать как $y = b - x \operatorname{ctg} \varphi$.

Пусть

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

— матрица оператора поворота на угол $-\varphi$, причем её элементы $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ получаются из условия $\operatorname{ctg} \varphi = -a \neq 0$, т.е.,

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \cos \varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

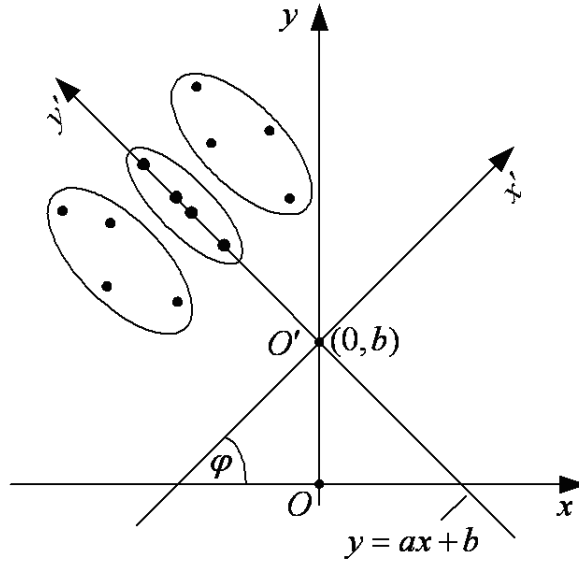


Рис. 3: Симметрия относительно произвольной оси.

Тогда координаты произвольной точки (x, y) в старой системе координат и (x', y') — в новой системе связаны соотношением

$$(x', y')^T = \mathcal{R}(x, y - b)^T, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x \cos \varphi + (y - b) \sin \varphi \\ y' = -x \sin \varphi + (y - b) \cos \varphi \end{cases} .$$

Рассмотрим, как и в предыдущем разделе, вектор

$$X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{2n}$$

составленный из координат характерных точек в системе (Oxy) с учетом разбиения на классы P_R, P_L, P_O , и пусть вектор X' состоит из координат тех же точек в системе $(O'x'y')$. Чтобы установить связь между векторами X и X' , рассмотрим матрицу

$$R^T = \mathcal{R} \otimes I_n = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot I_n & \sin \varphi \cdot I_n \\ -\sin \varphi \cdot I_n & \cos \varphi \cdot I_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где \otimes означает кронекерово произведение. Из его свойств [9] немедленно вытекает, что матрица R ортогональна, $R^{-1} = R^T$. Тогда

$$X' = R^T(X - bK), \quad \text{так что} \quad X = RX' + bK, \quad (7)$$

где K — следующий вектор: $K = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)^T$.

Преобразование (7) сводит рассматриваемую задачу к решенной ранее. А именно, симметризуя вектор X' , и возвращая затем результат в старую систему координат, получаем:

$$X_s = RX'_s + bK = R(QR^T(X - bK)) + bK,$$

или

$$X_s = GX + b(I - G)K, \quad \text{где} \quad G = RQR^T.$$

Как следует из непосредственных вычислений,

$$G = \frac{1}{2} I_{2n} + \tilde{G}, \quad (8)$$

где

$$\tilde{G} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\varphi \cdot S & \sin 2\varphi \cdot S \\ \sin 2\varphi \cdot S & \cos 2\varphi \cdot S \end{pmatrix}, \quad (9)$$

причем матрица S определяется выражением (4). При $b = 0$ и $\varphi = 0$ получаем найденное выше решение (5).

Симметризация с отысканием параметров оси симметрии

Покажем, что на основе рассмотренного метода можно не только осуществлять симметризацию относительно известной оси, но и определять неизвестные параметры оси симметрии таким образом, что симметризация будет достигаться минимальным изменением положения точек.

Пусть, как и ранее, $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ — множество всех характерных точек, заданных своими координатами $p_k = (x_k, y_k)$. Допустим, что на основе некоторой априорной информации, (скажем, того, что рассматриваются характерные точки изображения лица человека анфас), множество P разбито на непересекающиеся классы

$$P_R = \{p_1, \dots, p_m\}, \quad P_L = \{p_{m+1}, \dots, p_{2m}\} \quad \text{и} \quad P_O = \{p_{2m+1}, \dots, p_n\}$$

таким образом, что соответствующие точки $p_i \in P_R$ и $p_{m+i} \in P_L$ первых двух классов должны быть симметричны относительно некоторой заранее неизвестной оси симметрии, а точки класса P_O — лежать на этой оси. Учитывая это разбиение, сопоставим, как и в предыдущем разделе, с множеством $P = P_R \cup P_L \cup P_O$ вектор

$$X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{2n}$$

исходных координат характерных точек. Кроме того, для решения задачи удобно использовать следующие обозначения

$$\sigma = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_n)^T, \quad \sigma_0^1 = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_n)^T, \quad \sigma_1^0 = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_n)^T.$$

Будем считать, что ось симметрии задана уравнением $y = ax + b$ с неизвестными пока параметрами $a = -\operatorname{ctg} \varphi \neq 0$ и b . Рассмотрим вектор

$$X'(\varphi, b) = R^T(\varphi)(X - b\sigma_1^0),$$

где матрица $R^T(\varphi)$ преобразования вращения зависит от угла поворота φ и определяется выражением (6). Вспоминая соотношение (7) предыдущего раздела, заметим, что соответствующая оптимизационная задача может быть записана в виде

$$\left\| AY - R^T(\varphi)(X - b\sigma_1^0) \right\|^2 \xrightarrow{Y, \varphi, b} \min,$$

где матрица A задается выражением (2) первого раздела, а $Y \in \mathbb{R}^{2n}$ — переменный вектор. Иными словами, для отыскания оптимальной симметризации X_s необходимо найти φ_s , b_s и вектор Y_s , минимизирующие левую часть предыдущего выражения, после чего вернуть найденный вектор Y_s в исходную систему координат:

$$X_s = R(\varphi_s)Y_s + b_s\sigma_1^0.$$

Построенный вектор X_s будет определять оптимальную симметризацию данного множества характерных точек.

Приступая к решению поставленной задачи, обозначим для удобства минимизируемое выражение через

$$F(Y, \varphi, b) \stackrel{\text{def}}{=} \left\| AY - R^\top(\varphi)(X - b\sigma_1^0) \right\|^2$$

и распишем его подробно в матричном виде:

$$\begin{aligned} F(Y, \varphi, b) &= \left(AY - R^\top(\varphi)X + bR^\top(\varphi)\sigma_1^0, AY - R^\top(\varphi)X + bR^\top(\varphi)\sigma_1^0 \right) = \\ &= \left(AY - R^\top(\varphi)X + bR^\top(\varphi)\sigma_1^0 \right)^\top \cdot \left(AY - R^\top(\varphi)X + bR^\top(\varphi)\sigma_1^0 \right) \\ &= Y^\top A^\top AY - 2Y^\top A^\top R^\top(\varphi)X + 2bY^\top A^\top R^\top(\varphi)\sigma_1^0 + X^\top X - 2bX^\top \sigma_1^0 + b^2(\sigma_1^0)^\top \sigma_1^0. \end{aligned}$$

Для решения оптимизационной задачи необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial F(Y, \varphi, b)}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial F(Y, \varphi, b)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial F(Y, \varphi, b)}{\partial b} = 0.$$

После нахождения частных производных и очевидных преобразований получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} AY = QR^\top(\varphi)(X - b\sigma_1^0), \\ (\sigma_1^0)^\top R(\varphi)AY = (\sigma_1^0)^\top (X - b\sigma_1^0), \\ (X - b\sigma_1^0) \frac{dR(\varphi)}{d\varphi} AY = 0. \end{array} \right.$$

Первое (матричное) уравнение дает выражение для симметризованного вектора в зависимости от φ и b . Второе и третье уравнения являются скалярными и позволяют найти неизвестные параметры оси симметрии φ и b . Выпишем эти уравнения отдельно, выразив в них AY через φ и b с помощью первого уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X - b\sigma_1^0)^\top \frac{dR(\varphi)}{d\varphi} QR^\top(\varphi)(X - b\sigma_1^0) = 0, \\ (\sigma_1^0)^\top R(\varphi)QR^\top(\varphi)(X - b\sigma_1^0) = (\sigma_1^0)^\top (X - b\sigma_1^0). \end{array} \right.$$

Заметим, что

$$\frac{dR(\varphi)}{d\varphi} = R(\pi/2)R(\varphi)$$

и примем во внимание, что в силу введенных выше обозначений (8) и (9)

$$R(\varphi)QR^\top(\varphi) = G = \frac{1}{2}I + \tilde{G}.$$

Поэтому систему можно переписать в более простом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X - b\sigma_1^0)^\top R\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{2}I + \tilde{G}\right) (X - b\sigma_1^0) = 0, \\ (\sigma_1^0)^\top \tilde{G}(X - b\sigma_1^0) = \frac{1}{2}(\sigma_1^0)^\top (X - b\sigma_1^0). \end{array} \right.$$

Как нетрудно видеть,

$$(X - b\sigma_1^0)^\top R\left(\frac{\pi}{2}\right)(X - b\sigma_1^0) = 0,$$

поэтому система упрощается:

$$\begin{cases} (X - b\sigma_1^0)^\top R\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{G}(X - b\sigma_1^0) = 0, \\ (\sigma_1^0)^\top \tilde{G}(X - b\sigma_1^0) = \frac{1}{2}(\sigma_1^0)^\top (X - b\sigma_1^0). \end{cases}$$

Для нахождения φ и b проанализируем вначале второе уравнение системы. Нам понадобятся величины

$$x_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{и} \quad y_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

представляющие собой соответственно усредненную абсциссу и ординату вычисленных характерных точек. Тогда нетрудно видеть, что правая часть второго уравнения равна

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^0)^\top (X - b\sigma_1^0) = \frac{n}{2}(y_{av} - b). \quad (10)$$

Рассмотрим теперь левую часть уравнения. Непосредственными вычислениями получаем:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1^0)^\top \tilde{G}(X - b\sigma_1^0) = \\ & = \frac{1}{2} \left[-\sin 2\varphi \cdot \underbrace{(\sigma_0^1)^\top X}_{nx_{av}} + \cos 2\varphi \cdot \underbrace{(\sigma_1^0)^\top X}_{ny_{av}} + b \sin 2\varphi \cdot \underbrace{(\sigma_0^1)^\top \sigma_1^0}_0 - b \cos 2\varphi \cdot \underbrace{(\sigma_1^0)^\top \sigma_1^0}_n \right] = \\ & = \frac{n}{2} \left(-x_{av} \sin 2\varphi + y_{av} \cos 2\varphi - b \cos 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Приравняв выражения (10) и (11), после несложных преобразований находим значение параметра b :

$$b = y_{av} + x_{av} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (12)$$

Смысл полученного соотношения вполне понятен из рисунка 4.

Рассмотрим теперь первое уравнение последней системы. Для этого разобьем его на три слагаемых, как показано ниже:

$$\begin{aligned} & (X - b\sigma_1^0)^\top R\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{G}(X - b\sigma_1^0) = \\ & = \underbrace{X^\top R\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{G}X}_1 - b \underbrace{\left[X^\top R\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{G}\sigma_1^0 + (\sigma_1^0)^\top R\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{G}X \right]}_2 + b^2 \cdot \underbrace{(\sigma_1^0)^\top R\left(\frac{\pi}{2}\right)\tilde{G}\sigma_1^0}_3. \end{aligned}$$

Вычислим последовательно каждое слагаемое.

Первое слагаемое. Вспоминая определение (1) вектора X , представим его в блочном виде:

$$X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)^\top = (\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2^\top \mathbf{x}_3^\top \mathbf{y}_1^\top \mathbf{y}_2^\top \mathbf{y}_3^\top)^\top,$$

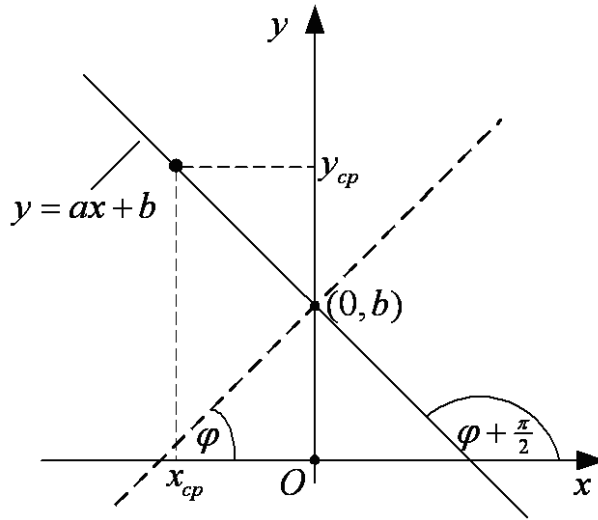


Рис. 4: Нахождение параметра b .

где

$$\mathbf{x}_1 = (x_1, \dots, x_m), \quad \mathbf{x}_2 = (x_{m+1}, \dots, x_{2m}), \quad \mathbf{x}_3 = (x_{2m+1}, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{y}_1 = (y_1, \dots, y_m), \quad \mathbf{y}_2 = (y_{m+1}, \dots, y_{2m}), \quad \mathbf{y}_3 = (y_{2m+1}, \dots, y_n)$$

— векторы x - и y -координат характерных точек, лежащих соответственно правее, левее и на оси симметрии. С учетом этого получаем:

$$\begin{aligned} & X^T R\left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{G} X = \\ & = -\left[\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2\right) + \left(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\right) + \left(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3\right)\right] \cos 2\varphi - \left[\left(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\right) + \left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3\right) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_3\right)\right] \sin 2\varphi . \end{aligned}$$

Второе слагаемое. Учитывая, что матрица \tilde{G} симметрична и $R^T\left(\frac{\pi}{2}\right) = -R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, перепишем второе слагаемое в виде $(\sigma_1^0)^T \left[R\left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{G} - \tilde{G} R\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] X$. Тогда, с помощью непосредственных вычислений, получаем, что второе слагаемое равняется

$$\left[-\cos 2\varphi \cdot (\sigma_0^1)^T - \sin 2\varphi \cdot (\sigma_1^0)^T \right] X = -nx_{av} \cos 2\varphi - ny_{av} \sin 2\varphi .$$

Третье слагаемое. Как показывают непосредственные вычисления,

$$(\sigma_1^0)^T R\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\sigma_0^1)^T, \quad \tilde{G} \sigma_1^0 = \frac{1}{2} \left(\sigma_1^0 \cos 2\varphi - \sigma_0^1 \sin 2\varphi \right).$$

Следовательно, третье слагаемое имеет вид

$$(\sigma_1^0)^T R\left(\frac{\pi}{2}\right) \tilde{G} \sigma_1^0 = (\sigma_0^1)^T \cdot \frac{1}{2} \left(\sigma_1^0 \cos 2\varphi - \sigma_0^1 \sin 2\varphi \right) = -\frac{n}{2} \sin 2\varphi .$$

Таким образом, второе уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2\right) + \left(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\right) + \left(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3\right)\right] \cos 2\varphi + \left[\left(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\right) + \left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3\right) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_3\right)\right] \sin 2\varphi - \\ & - bn \left[x_{av} \cos 2\varphi + y_{av} \sin 2\varphi \right] + b^2 \frac{n}{2} \sin 2\varphi = 0 . \end{aligned}$$

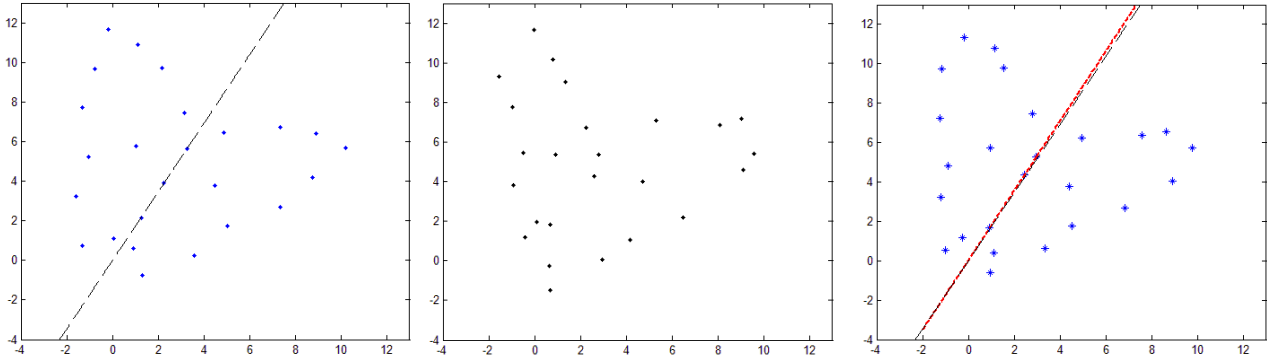


Рис. 5: Пример симметризации с нахождением оси симметрии.

Учитывая, что $b = y_{av} + x_{av} \operatorname{ctg} \varphi$, после преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \left[(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3) - nx_{av}y_{av} \right] \cos 2\varphi + \\ & + \left[(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) - (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_3) + \frac{1}{2}n(x_{av}^2 - y_{av}^2) \right] \sin 2\varphi = 0, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3) - nx_{av}y_{av}}{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3) - \frac{1}{2}(\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_3) - \frac{1}{2}n(x_{av}^2 - y_{av}^2)}.$$

Данному выражению можно придать более удобный вид, если перейти к центрированным координатам

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - x_{av}\mathbf{e}, \quad \dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{y}_i - y_{av}\mathbf{e}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

где \mathbf{e} — вектор соответствующей размерности, состоящий из единиц. Нетрудно видеть, что данное преобразование соответствует переносу начала системы координат в точку с координатами (x_{av}, y_{av}) . Тогда после преобразований получаем

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{(\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{y}}_2) + (\dot{\mathbf{x}}_2, \dot{\mathbf{y}}_1) + (\dot{\mathbf{x}}_3, \dot{\mathbf{y}}_3)}{(\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2) - (\dot{\mathbf{y}}_1, \dot{\mathbf{y}}_2) + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}_3, \dot{\mathbf{x}}_3) - \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{y}}_3, \dot{\mathbf{y}}_3)}. \quad (13)$$

Подставляя вычисленные по формулам (13) и (12) значения параметров φ и b в первое уравнение системы, находим искомую симметризацию $A\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ исходного вектора характерных точек X . Для завершения решения задачи необходимо вернуть найденный вектор в исходную (старую) систему координат.

Рисунок 5 демонстрирует результат симметризации с помощью рассмотренного выше метода. В левой части рисунка показана система точек, симметричных относительно отмеченной оси симметрии, а в средней — те же точки после зашумления, приведшего к утрате симметричности. Правая часть рисунка показывает точки после процесса симметризации, причем красным показана восстановленная ось симметрии, а черным — исходная.

Заключение

Рассмотренная выше задача симметризации характерных точек относительно осевой симметрии имеет многочисленные приложения, так как это наиболее простой и часто

встречающийся вид симметрии. Вместе с тем, в задачах, связанных с обработкой изображений, встречаются и иные виды симметрии – вращательная, диэдральная, трансляционная и другие. Особый интерес представляет симметризация в условиях аффинных искажений, которые имеют место в большинстве реальных разработок. Строгое математическое решение указанных задач может оказаться не очень простым, но зато предоставит дополнительные возможности для качественной обработки изображений.

Благодарности

Авторы благодарят А. Абраменко, И. Гречухина и С. Левашёва за помощь в проведении вычислительных экспериментов. Авторы также благодарят неизвестного рецензента за ряд замечаний, способствовавших улучшению работы.

Литература

- [1] *Podolak J., Shilane P., Giesen J., Gross M., Guibas L.* Example-based 3D scan completion // Proc. Symposium on Geometry Processing, 2005. — Pp. 23–32.
- [2] *Martinet A., Soler C., Holzschuch N., Sillion F.* Accurate detection of symmetries in 3D shapes. // ACM Trans. Graph, 2006. — Vol. 25, No. 2. — Pp. 439–464.
- [3] *Mitra N. J., Guibas L. J., Pauly M.* Partial and approximate symmetry detection for 3D geometry // ACM Trans. Graph, 2006. — Vol. 25, No. 3. — Pp. 560–568.
- [4] *Thrun S., Wegbreit B.* Shape from symmetry // Int. Conference on Computer Vision, 2005.
- [5] *Simari P., Kalogerakis E., Singh K.* Folding meshes: Hierarchical mesh segmentation based on planar symmetry // Proc. Symposium on Geometry Processing, 2006.
- [6] *Каркищенко А. Н., Гречухин И. А.* Статистическое распознавание лиц по геометрии характерных точек для систем транспортной безопасности // Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 38. — М.: ИПУ РАН, 2012. — С. 78–90.
- [7] *Каркищенко А. Н., Гречухин И. А.* Локализация характерных точек на основе естественной симметрии изображений. // Труды первой научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте». — М.: НИИАС, 2012. — С. 261–265.
- [8] *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применения. — М.: Мир, 1980. — 454 с.
- [9] *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972. — 232 с.