

Параметрическое семейство базовых скелетов многоугольной фигуры*

Жукова К. В., Рейер И. А.

kz@pisem.net, reyer@forecsys.ru

Москва, Вычислительный центр РАН

В работе рассматривается базовый скелет — устойчивое скелетное представление формы, строящееся на основе скелета аппроксимирующей объект многоугольной фигуры. Исследуются свойства монотонности и непрерывности изменения базового скелета при увеличении величины точности аппроксимации. Вводится понятие разметки скелета — множества точек скелета многоугольной фигуры, описывающего процесс изменения базового скелета и позволяющего строить базовые скелеты для заданного набора или интервала значений точности аппроксимации.

Ключевые слова: скелетное представление формы, регуляризация скелета, базовый скелет, размеченный скелет, масштабируемые модели формы.

Parametric family of skeleton bases of a polygonal figure*

Zhukova K. V., Reyer I. A.

Computing Center of the Russian Academy of Sciences

In the paper a skeleton base is considered. A skeleton base is a stable skeletal shape representation constructed with use of a polygonal figure approximating the shape. The monotonicity and continuity of change of a skeleton base with growth of the approximation accuracy value is investigated. A concept of a skeleton markup is presented. A skeleton markup is a set of points of a polygonal figure's skeleton describing the change of a skeleton base and allowing one to build skeleton bases for a given set or range of approximation accuracy values.

Keywords: skeletal shape representation, skeleton regularization, skeleton base, marked skeleton, scalable shape models..

Введение

Скелетное представление формы объекта [1] является широко используемым инструментом при решении задач распознавания изображений, поскольку скелет содержит информацию о структуре объекта. Однако использовать такое представление в «чистом» виде не представляется возможным, так как оно очень чувствительно к изменениям границы. Даже при небольших «шевелениях» границы в ее окрестности возникают шумовые скелетные ветви, в результате чего разница между скелетами близких объектов может быть очень существенной. При этом скелет содержит некоторую «фундаментальную» часть, на которую изменения границы в определенных пределах влияют незначительно. Такие фундаментальные части скелетов схожих объектов близки в метрическом смысле, но нельзя гарантировать схожести их структур: при деформациях протяженных фрагментов границы, которые определяют фундаментальную часть скелета, меняется их положение друг относительно друга, и, значит, может меняться структура фундаментальной части. Отметим, что ветви фундаментальной части скелетов можно разделить на два типа: основные

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-07-00462 и № 11-01-00783.

и связующие. На основные ветви изменения границы в пределах точности существенно не влияют, а связующие ветви определяют способ соединения основных ветвей и могут появляться и исчезать при деформациях границы.

Существует множество методов выделения фундаментальной части скелета, основанных на так называемой «стрижке» скелета [2]. Идея большинства таких методов состоит в следующем: после удаления ветви по полученному скелету восстанавливается силуэт и сравнивается с исходным объектом. По результату сравнения на основе различных правил делается вывод, является ли удаляемая ветвь шумовой.

Помимо методов «стрижки», существует другой подход, основанный на выделении в скелете такого подмножества, которое будет устойчиво к изменению границы. Например, в работе [3] вводится понятие «инъективной» области — замкнутой ограниченной области, граница которой не имеет выпуклых углов, а все максимальные вписанные круги касаются границы более, чем в двух точках. В работе показано, что если инъективная область аппроксимирует некоторую замкнутую ограниченную область с точностью $\varepsilon < \min \left\{ \rho \tan^2 \frac{\theta}{2}, \frac{\rho}{2} \right\}$ (здесь ρ — наименьший радиус максимального вписанного круга инъективной области, а θ — наименьший угол между радиусами максимального вписанного круга, проходящими через точки касания) в смысле расстояния Хаусдорфа, то Хаусдорфово отклонение скелета аппроксимируемой области от скелета инъективной области не превышает $\frac{\rho\varepsilon}{\rho \sin^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \cos^2 \frac{\theta}{2}}$. Таким образом, скелет инъективной области можно рассматривать как модель фундаментальной части скелета при относительно небольших «шевелениях» границы. Отметим, что авторы не описывают, каким образом нужно строить инъективную область.

В работе [4] рассматривается область в R^n и подмножество ее скелета M_λ — множество точек скелета, для которых радиус соответствующего вписанного круга не меньше λ . Показано, что λ -скелет M_λ устойчив к изменениям границы, если расстояние Хаусдорфа между областями $\varepsilon < \min \left(\frac{\lambda}{10}, \frac{\lambda^3}{50D^2}, \frac{\lambda^4}{1200D^4} \right)$ (здесь D — диаметр исходной области): расстояние между λ -скелетом исходной области и скелетом близкой области не превосходит $\frac{72D^2}{\lambda^2}\varepsilon$. Модель λ -скелета области авторы строят, используя так называемый скелет Вороного — специальное подмножество ребер диаграммы Вороного некоторого набора точек границы области.

Заметим, что в существующих работах, посвященных созданию устойчивых скелетных моделей, вопрос структурного сходства скелетов практически не затрагивается. В этом отношении особый интерес представляет статья [5], в которой предложен метод построения обобщённого скелетного графа. В терминологии авторов при незначительных изменениях границы может произойти «перехлест» ребер скелета, то есть близко расположенные вершины «меняются местами». В работе описана процедура «склейки» узлов скелета, идея которой заключается в следующем: каждая ветвь скелета с нетерминальными вершинами, такая, что расстояние между вершинами достаточно мало, считается связующей и заменяется на один узел. При этом узел выбирают так, что восстановленный по полученному скелету силуэт отличается от исходной фигуры не более чем на заданную величину.

В [7, 8] было предложено использовать в качестве устойчивого скелетного представления базовый скелет — подмножество скелета многоугольной фигуры. С базовым скелетом связана особая замкнутая область — так называемое скелетное ядро [9]. Эта область образована совокупностью окрестностей ребер базового скелета (границами этих окрестностей являются отрезки прямых и фрагменты парабол и гипербол, в зависимости от типа ребра), внутрь которых попадают ветви скелетов любых замкнутых односвязных областей,

близких многоугольной фигуре в смысле расстояния Хаусдорфа (рис. 1). Скелетное ядро, в частности, позволяет выделять в базовом скелете основные и связующие ветви скелета на основе свойств их окрестностей.

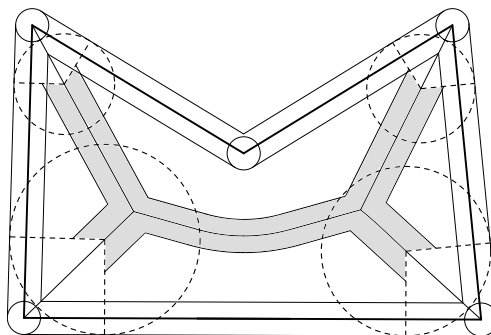


Рис. 1: Базовый скелет и скелетное ядро многоугольной фигуры.

С ростом величины точности аппроксимации базовый скелет изменяется монотонно и непрерывно (в смысле расстояния Хаусдорфа). В настоящей работе проводится обоснование этих свойств базового скелета и исследуется процесс изменения. Для описания поведения семейства базовых скелетов, соответствующих различным значениям точности, вводится понятие разметки скелета — множества точек скелета многоугольной фигуры, характеризующего существенные изменения базового скелета и позволяющего строить базовые скелеты для заданного набора или интервала значений точности аппроксимации.

Базовый скелет многоугольной фигуры

Введем необходимые определения в соответствии с [6, 8].

Определение 1. *Фигурой называется связная замкнутая область на плоскости, ограниченная конечным числом непересекающихся жордановых кривых.*

Рассмотрим фигуру F на плоскости R^2 с евклидовым расстоянием $d(p, q)$, $p, q \in R^2$.

Определение 2. *Пустым кругом фигуры F с центром в точке p и радиусом $r \geq 0$ называется замкнутое множество точек $\tilde{C}_r(p) = \{q : q \in R^2, d(p, q) \leq r\}$ такое, что $\tilde{C}_r(p) \subset F$.*

Определение 3. *Максимальным пустым кругом называется пустой круг, который не содержится ни в каком другом пустом круге.*

Определение 4. *Скелетом фигуры $S(F)$ называется множество центров всех ее максимальных пустых кругов.*

Скелет многоугольной фигуры представляет собой конечное множество отрезков прямых и фрагментов парабол: для двух вершин вогнутых углов u_1 и u_2 границы серединной осью является серединный перпендикуляр к отрезку u_1u_2 ; для двух сегментов границы — биссектриса угла, образованного этими сегментами; для вогнутой вершины u_1 и сегмента — фрагмент параболы с фокусом u_1 и директрисой, содержащей сегмент. Таким образом, скелет многоугольной фигуры имеет вид плоского графа (рис. 2). Ребрами этого графа являются отрезки и фрагменты парабол, а вершинами следующие точки скелета:

- точки, являющиеся вершинами выпуклых углов границы (эти точки представляют собой терминальные вершины скелета степени 1);

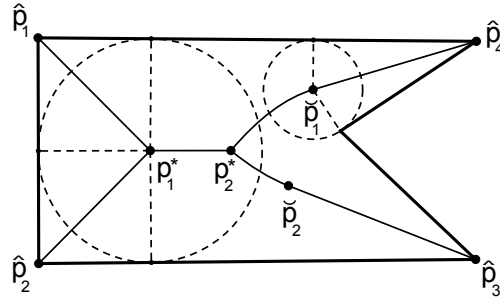


Рис. 2: Вершины и ребра скелета многоугольной фигуры.

- точки, максимальные пустые круги с центрами в которых касаются границы в трех и более точках (вершины скелета степени 3 и более);

- точки, которые являются общими точками двух ветвей и имеют максимальный пустой круг, касающийся границы в двух точках (вершины скелета степени 2).

Пусть P — односвязная многоугольная фигура, ε — некоторое неотрицательное число. В качестве расстояния между множествами будем использовать расстояние Хаусдорфа H .

Определение 5. Круг C называется ε -допустимым кругом для P , если:

- 1) $H(P, P \cup C) \leq \varepsilon$;
- 2) $H(\partial P, \partial(P \cup C)) \leq \varepsilon$.

Определение 6. Круг C называется максимальным ε -допустимым кругом для P , если он является ε -допустимым кругом для P и не содержится целиком ни в каком другом ε -допустимом для P круге.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Если $C_r(p)$ — максимальный ε -допустимый круг для P , то $r \geq \varepsilon$.

Утверждение 2. Если $C_r(p)$ — максимальный ε -допустимый круг для P , то $C_{r-\varepsilon}(p)$ — максимальный пустой круг для P .

Утверждение 3. Если $C_r(p)$ — максимальный пустой круг для P , то $C_{r+\varepsilon}(p)$ — максимальный ε -допустимый круг для P .

Следствием этих утверждений является следующая

Теорема 1. Множество центров максимальных ε -допустимых кругов для P совпадает со множеством центров максимальных пустых кругов для P .

Пусть C — максимальный ε -допустимый круг для P . Точки, в которых соответствующий C максимальный пустой круг C' касается границы фигуры, разбивают границу на фрагменты P_1, P_2, \dots, P_n , $n \geq 2$, а радиусы круга C , проходящие через эти точки, разбивают окружность круга C на дуги L_1, L_2, \dots, L_n (рис. 3).

Определение 7. Максимальный ε -допустимый круг C называется базовым кругом для многоугольной фигуры P , если $\exists i, j : i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ такие, что $H(P_i, L_i) \geq \varepsilon$ и $H(P_j, L_j) \geq \varepsilon$.

Определение 8. Базовым скелетом $S_{base}(P, \varepsilon)$ многоугольной фигуры P называется множество центров всех базовых кругов области.

Из Теоремы 1 следует, что базовый скелет P является подмножеством скелета P .

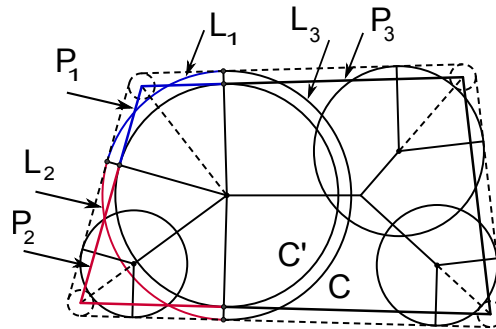


Рис. 3: Фрагменты границы фигуры и дуги окружности максимального ε -допустимого круга.

Монотонность изменения базового скелета

Рассмотрим, как изменяется базовый скелет при росте величины точности аппроксимации ε . Точки скелета могут быть трех типов: терминальные вершины (они совпадают с вершинами границы), нетерминальные вершины и внутренние точки ребер. Для любой точки скелета определен максимальный пустой круг с центром в этой точке. Для терминальных вершин точка касания соответствующего максимального пустого круга единственна и совпадает с самой вершиной; для внутренних точек ребер максимальный пустой круг касается границы в двух точках; для нетерминальных вершин скелета — в $k \geq 2$ точках. Таким образом, для каждой точки O скелета граница фигуры разбивается точками касания максимального пустого круга с центром в O на $n \geq 2$ фрагментов (в случае терминальной вершины единственную точку касания тоже считаем фрагментом границы). Для фиксированного ε рассмотрим максимальный ε -допустимый круг с центром в O . Радиусы, проведенные через точки касания максимального пустого круга, разбивают окружность максимального ε -допустимого круга на n дуг, соответствующих фрагментам границы. Для каждой пары соответствующих множеств «дуга-фрагмент границы» определено расстояние Хаусдорфа между ними. Если существует две пары таких множеств, для которых расстояние Хаусдорфа между элементами пары больше либо равно ε , то точка O принадлежит базовому скелету. Поскольку граница представляет собой замкнутую ломаную, то для вычисления расстояния Хаусдорфа между элементами пары «дуга-фрагмент границы» достаточно знать расстояния от дуги до вершин фрагмента границы.

Исследуем, как изменяется базовый скелет в зависимости от точности аппроксимации ε . При $\varepsilon=0$ все точки скелета являются базовыми. При увеличении ε процесс «выпадения» точек из базового скелета начнется от терминальных вершин скелета. Пусть p — некоторая точка скелета, C' — максимальный пустой круг с центром в точке p радиуса r , C — максимальный ε -допустимый круг с центром в точке p и радиусом $r + \varepsilon$.

Обозначим U_i , $i = 1, \dots, n$ — подмножества вершин границы, принадлежащих фрагментам, на которые разбивается граница точками касания круга C' . Рассмотрим максимальное расстояние от точки p до точек из множества U_i :

$$d_i = \max\{d(p, u) \mid u \in U_i\}.$$

Упорядочим расстояния d_i , $i = 1, \dots, n$, по возрастанию:

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n-1} \leq d_n,$$

и выберем такое подмножество U_j , что соответствующее расстояние d_j является вторым по величине. Если таких подмножеств несколько, рассмотрим любое из них. Если же $d_1 =$

$= d_2 = \dots = d_{n-1} = d_n$, то выберем любое из подмножеств U_i . В дальнейшем выбранное подмножество вершин границы будем обозначать U' , а соответствующее максимальное расстояние от точки p до точек U' будем обозначать d' .

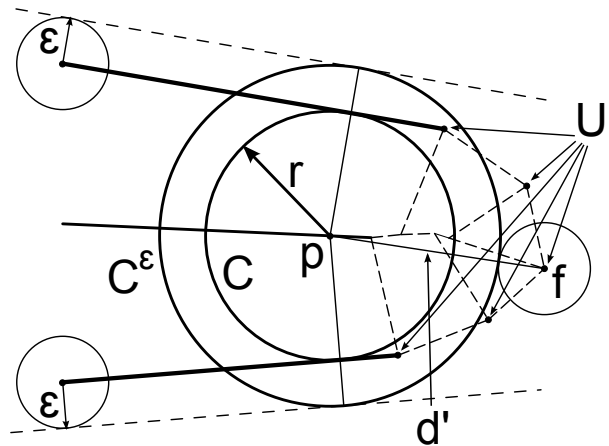


Рис. 4: Терминальная вершина базового скелета.

Теорема 2. *Базовый скелет односвязной многоугольной фигуры монотонно зависит от точности аппроксимации ε .*

Доказательство. При $\varepsilon > (d' - r)/2$ (рис.4) точка p не будет базовой, так как нарушается условие Определения 7. Значит, существует такое ε , при котором точка p «выпадает» из базового скелета. Пусть при $\varepsilon = \varepsilon_1$ максимальный ε -допустимый круг C^{ε_1} с центром в точке p не базовый. Докажем, что для любого $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ соответствующий максимальный ε_2 -допустимый круг C^{ε_2} с центром в p также не является базовым. Так как круг C^{ε_1} не базовый, то для $k \geq n - 1$ дуг окружности C^{ε_1} расстояние Хаусдорфа между дугой и соответствующим фрагментом границы меньше ε_1 . Рассмотрим любую из таких дуг. Обозначим эту дугу L_1 , а соответствующий фрагмент границы $P - P_{12}$. Соответственно, $H(L_1, P_{12}) < \varepsilon_1$. Пусть L_2 - дуга окружности C^{ε_2} , образуемая радиусами C^{ε_2} , проходящими через те же точки касания соответствующего максимального пустого круга, что и радиусы C^{ε_1} , образующие дугу L_1 . Поскольку для расстояния Хаусдорфа выполняется неравенство треугольника $H(L_2, P_{12}) \leq H(L_2, L_1) + H(L_1, P_{12})$, то $H(L_2, P_{12}) < (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Получаем, что для $k \geq n - 1$ дуг окружности C^{ε_2} расстояние Хаусдорфа между дугой и соответствующим фрагментом границы меньше ε_2 , то есть круг C^{ε_2} тоже не является базовым. Это означает, что если ε достигло значения, при котором точка перестает быть базовой, то при всех последующих значениях ε эта точка также не будет принадлежать базовому скелету. \square

Из теоремы следует, что базовый скелет, соответствующий точности $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, является подмножеством базового скелета точности ε_1 .

«Стирание» скелета

Итак, при $\varepsilon = \frac{d' - r}{2}$ точка p является терминальной вершиной базового скелета. Посмотрим, как происходит изменение базового скелета при росте ε .

Как известно, ребро скелета многоугольной фигуры может быть трех типов: отрезок, порожденный парой сегментов границы; отрезок, порожденный парой вершин границы;

фрагмент параболы, порожденный вершиной и сегментом. Рассмотрим, как ведет себя терминальная точка базового скелета в каждом из этих случаев.

Пусть s_1 и s_2 — два сегмента границы, точка p принадлежит бисектору этой пары, $\varepsilon > 0$ такое, что точка p является терминальной точкой базового скелета (рис.5). Пусть

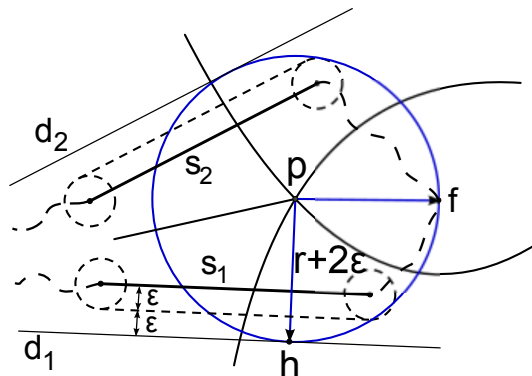


Рис. 5: Стирающие кривые для ребра – бисектора двух сегментов границы.

f — наиболее удаленная от точки p вершина границы из множества U' , $r_\varepsilon = r + \varepsilon$ — радиус базового круга с центром в точке p . Рассмотрим окружность радиуса $r + 2\varepsilon$ с центром в p . Нетрудно видеть, что эта окружность проходит через точку f . Пусть ph — радиус этой окружности, перпендикулярный сегменту s_1 . Так как $pf = ph$, то точка p лежит на параболе с фокусом f и директрисой, проходящей через точку h и параллельной сегменту границы s_1 (аналогично рассуждая, видим, что точка p принадлежит параболе с фокусом f и директрисой, параллельной сегменту s_2 и лежащей на расстоянии 2ε от s_2). Таким образом, терминальная точка базового скелета лежит на пересечении параболы и ребра скелета. Увеличим ε на некоторую достаточно малую величину δ . Пусть p_1 — терминальная вершина базового скелета точности $\varepsilon_1 = \varepsilon + \delta$, r_{ε_1} — радиус базового круга с центром в p_1 . Тогда $r_{\varepsilon_1} = r_\varepsilon + \delta$. Точка p_1 будет точкой пересечения ребра скелета и параболы с фокусом в той же точке f . Директриса этой параболы параллельна сегменту s_1 и лежит на расстоянии $2(\varepsilon + \delta)$ от него. В системе координат с центром в фокусе f и осью абсцисс, параллельной сегменту s_1 , параболы при разной точности ε имеют один вид:

$$y = \frac{x^2}{4(\varepsilon + c)} - (\varepsilon + c)$$

Отсюда видим, что при увеличении ε директриса удаляется от фокуса, ветви параболы «расходятся» и ребро скелета «стирается» точкой пересечения с параболой.

Рассмотрим теперь случай, когда элементами, порождающими ребро, являются сегмент s и вершина a границы (рис. 6). Рассуждая аналогично, получим для сегмента s параболу с фокусом f и директрисой, параллельной s и лежащей на расстоянии 2ε от s . Рассмотрим базовый круг с центром в p и радиусом r_ε . Очевидно, что $r_\varepsilon = pf - \varepsilon = pa + \varepsilon$. Следовательно, $pf - pa = 2\varepsilon$, то есть разность расстояний постоянна. Значит, точка p лежит на гиперболе с фокусами f и a и расстоянием между вершинами 2ε .

Теперь рассмотрим ситуацию, когда ребро является бисектором двух вершин границы a и b (рис. 7).

Нетрудно видеть, что в данном случае центр базового круга лежит на пересечении ветвей двух гипербол — с фокусами $\{a, f\}$ и $\{b, f\}$ соответственно. Расстояние между вершинами у гипербол одинаково и равно 2ε .

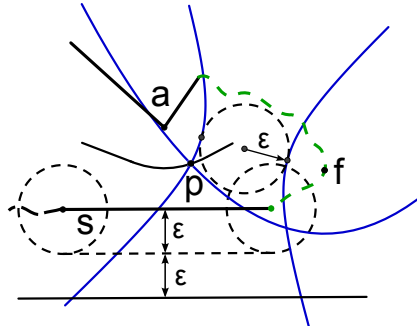


Рис. 6: Стирающие кривые для ребра – бисектора сегмента и вершины границы.

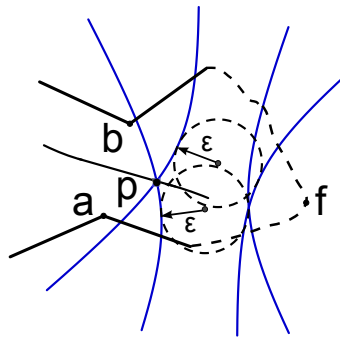


Рис. 7: Стирающие кривые для ребра – бисектора двух вершин границы.

Мы рассмотрели стирание ребра скелета в трёх элементарных случаях. Однако возможно такое взаимное расположение вершин границы, когда процесс изменения скелета более сложен. Исследуем такие ситуации подробнее.

Точки смены стирающих кривых ребра

Итак, стирающую кривую для ребра определяют инцидентные элементы границы и самая удалённая точка f из подмножества вершин границы U' . Для определения положения точки f воспользуемся диаграммой Вороного дальней точки [10]. Для каждой вершины границы из подмножества U' определим «зону дальности» — множество точек, расстояние до которых от этой вершины больше, чем от любой другой. Таким образом, в «зону дальности» точки f попадут ребра скелета, для которых эта точка является наиболее удаленной из подмножества вершин U' . Если ребро скелета целиком лежит в одной зоне дальности, то для всех точек ребра вершина, определяющая стирающие кривые, единственна. В противном случае ребро разбивается на несколько фрагментов, каждому из которых соответствует своя вершина (рис. 8). Отметим, что диаграмму дальней точки имеет смысл строить для подмножества, состоящего только из выпуклых вершин границы, так как невыпуклая вершина не может быть самой удаленной точкой для ребра.

Для ребра, которое пересекается с ребром диаграммы Вороного дальней точки, стирание происходит следующим образом (рис. 9). Пусть ребро v_1v_2 пересекает ребро диаграммы в точке q . Это значит, что для точек фрагмента ребра v_1q самой удаленной точкой является вершина a , поэтому v_1q стирается парой кривых, фокусом (или одним из фокусов) которых является точка a (в рассматриваемом примере это парабола с фокусом a и гипербола, один из фокусов которой a). В точке q происходит смена самой удаленной точки, и, следовательно, пары кривых. Соответственно, фрагмент ребра qv_2 стирается параболой

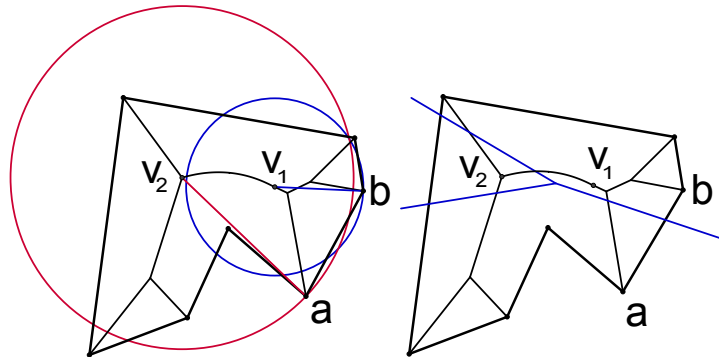


Рис. 8: Фрагменты ребра, для которых наиболее удаленные точки из U' различны.

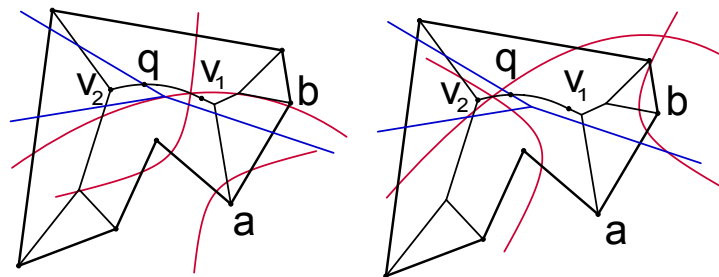


Рис. 9: Точка смены стирающих кривых ребра.

с фокусом b и гиперболой, один из фокусов которой b . Заметим, что ребро стирается в одном направлении.

Возможна и более сложная ситуация. Рассмотрим фрагмент фигуры на рис.10. Будем считать, что рассматриваемое подмножество вершин границы является вторым по дальности подмножеством U' .

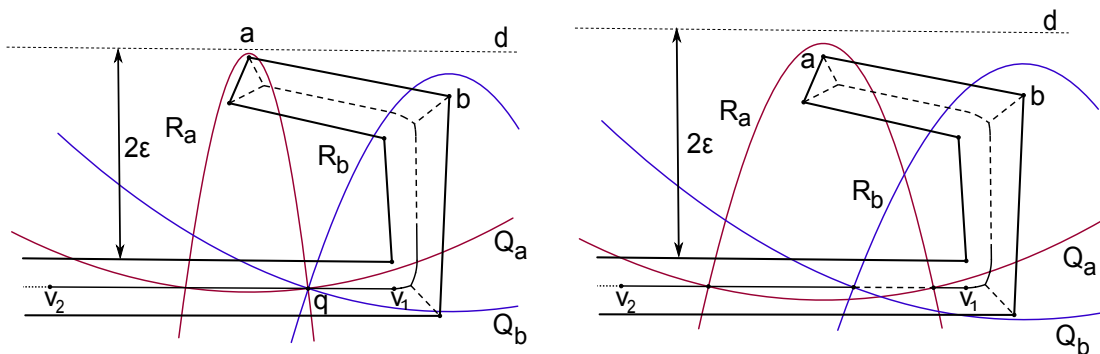


Рис. 10: Нарушение связности базового скелета в точке смены стирающих кривых.

Рассмотрим ребро v_1v_2 . На нем находится точка q , в которой ребро пересекается с ребром диаграммы Вороного дальней точки, и, соответственно, происходит смена стирающей кривой. Эта точка равноудалена от вершин a и b границы. Стирающими кривыми для ребра v_1v_2 являются две пары парабол: (R_a, Q_a) для части ребра v_1q и (R_b, Q_b) для части ребра qv_2 . Рассмотрим параболы с одинаковой директрисой d R_a и R_b . При достаточно малых значениях ϵ директриса d лежит между фокусом параболы и сегментом границы, которому параллельна директриса. При значениях ϵ , больших некоторого ϵ_1 , фокус и сегмент границы лежат по одну сторону от директрисы. Это значит, что параболы пе-

ресекают ребро v_1v_2 . Таким образом, с точки q начнется стирание ребра v_1v_2 параболой R_a и R_b в разных направлениях — то есть в этой точке произойдёт нарушение связности и базовый скелет разделится на две части.

Отметим, что значение ε , при котором стирающие кривые проходят через точку q , меньше, чем соответствующие значения для концевых точек ребра (так как точка q «выпадает» из базового скелета раньше, чем точки v_1 и v_2).

Точки касания ребра и стирающей кривой

Исследуем ситуации, в которых одна и та же пара стирающих кривых пересекает ребро в нескольких точках и стирает его в разных направлениях.

Рассмотрим сначала случай, когда ребро скелета представляет собой фрагмент параболы, а стирают ребро, соответственно, парабола и гипербола. Директрисы парабол параллельны, но совпадать парабола не могут, так как их фокусы всегда различны: фокус параболы, определяющей ребро, не является выпуклой вершиной, поэтому он не может быть наиболее удаленной точкой для ребра, и, следовательно, фокусом стирающей параболы. При $\varepsilon = 0$ директрисы парабол совпадают. При увеличении ε директриса стирающей параболы удаляется от директрисы параболы, определяющей ребро. Поэтому возможна лишь ситуация, когда с ростом ε парабола сначала пересекается в двух точках, а затем касается друг друга (при дальнейшем увеличении ε парабола не имеют точек пересечения) (рис. 11). В момент, когда парабола касается друг друга, стирающая гипербола вырождается в лучи, исходящие из фокусов. Это происходит при ε , равном половине расстояния между фокусами.

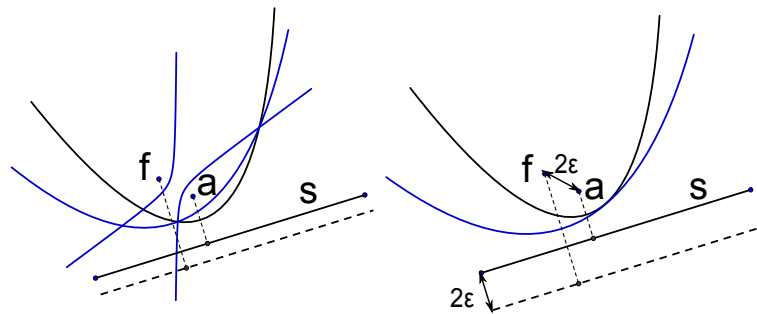


Рис. 11: Касание параболического ребра и стирающей параболы.

Таким образом, параболическое ребро, будет стираться с двух сторон и последней точкой ребра будет точка касания парабол. На рис. 12 показан фрагмент фигуры, для которого стирание скелета закончится описанным образом.

Теперь рассмотрим случай, когда ребром скелета является отрезок, порожденный двумя вершинами границы (рис. 13). Здесь рассуждения аналогичны.

Пусть a и b — вершины границы, v_1v_2 — ребро скелета, порожденное вершинами a и b (отрезок), f — самая удаленная точка. Аналогично предыдущему случаю, ребро v_1v_2 стирается парой гипербол с двух сторон. Целиком ребро сотрется, когда одна из гипербол будет касаться отрезка-ребра, а вторая выродится в пару лучей, исходящих из фокусов.

При этом значение ε будет равно половине расстояния между фокусами гиперболы, которая вырождается в лучи. На рис. 14 показан пример фрагмента базового скелета фигуры, оставшегося в результате нарушения связности. Стирание скелета этого фрагмента заканчивается на ребре — бисекторе пары вершин границы.

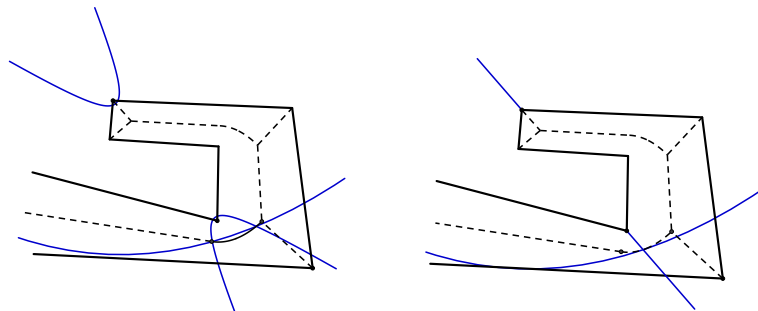


Рис. 12: Пример скелета фигуры с точкой касания на параболическом ребре.

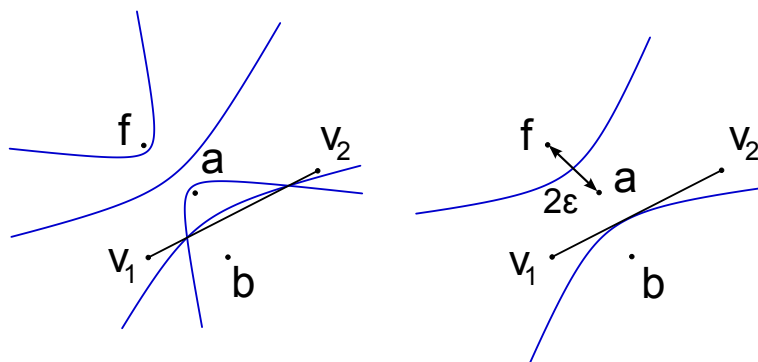


Рис. 13: Касание ребра – бисектора двух вершин и стирающей гиперболы.

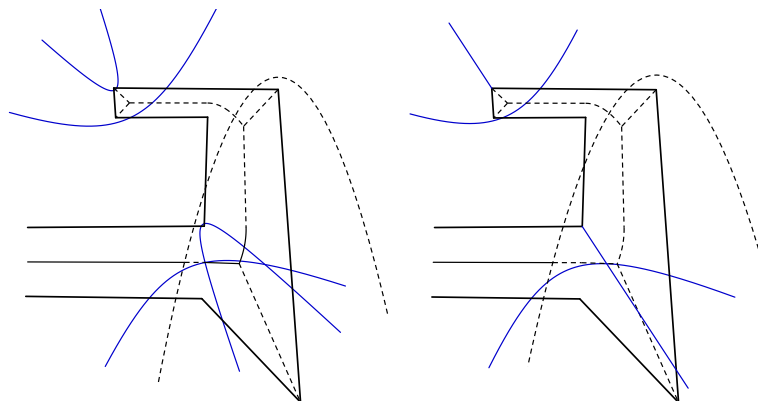


Рис. 14: Пример скелета фигуры с точкой касания на ребре – бисекторе двух вершин.

Возможна ли аналогичная ситуация в случае, если оба элемента являются сегментами? Директриса секущей параболы разбивает плоскость на две полуплоскости. Если фокус параболы (наиболее удаленная точка) f и ребро скелета лежат в разных полуплоскостях, то парабола не пересекает ребро. Пусть точка f и ребро скелета лежат в одной полуплоскости. Тогда при увеличении ε расстояние от ребра скелета до директрисы параболы будет увеличиваться. Следовательно, ситуация, когда парабола пересекает ребро в двух точках при некотором ε_1 , а при некотором $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ касается ребра, невозможна. Но возможно обратное: при увеличении ε одна из стирающих парабол сначала касается ребра, а затем пересекает его в двух точках. При этом вторая стирающая парабола в момент касания вырождена и представляет собой луч из точки f , перпендикулярный соответствующему сегменту границы и пересекающий ребро в точке касания ребра первой параболой. Касание происходит при ε , равном половине расстояния от точки f до сегмента границы,

определяющего вырожденную в луч параболу (то есть в момент, когда директриса, параллельная сегменту, проходит через точку f) (рис. 15). Соответственно, в этом случае, в отличие от двух предыдущих, нарушается связность базового скелета.

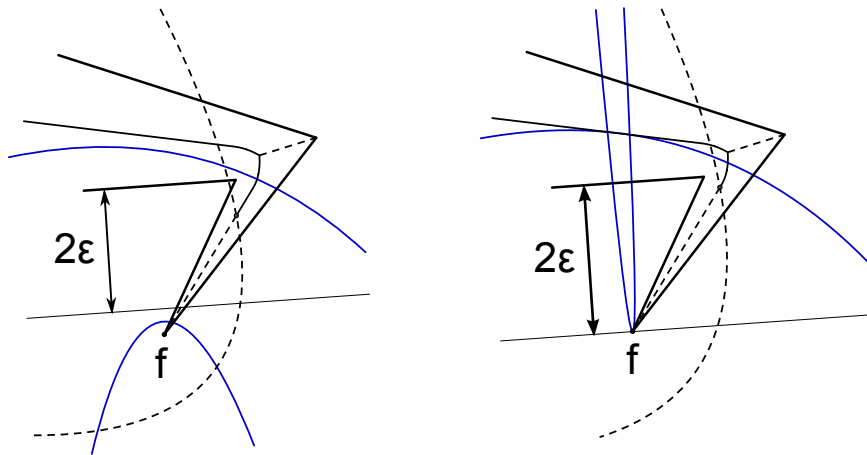


Рис. 15: Пример скелета фигуры с точкой касания на ребре – бисекторе двух сегментов.

Центральные точки скелета

При достижении некоторого значения ε из базового скелета исчезнут все ребра. Возникает вопрос, какая точка скелета исчезнет последней. Логично ожидать, что в последней точке v_0 «сойдутся» две пары стирающих кривых, порожденные разными множествами U' . Пусть v_0 является внутренней точкой некоторого ребра v_1v_2 , для отрезков v_1v_0 и v_0v_2 множества U' различны и каждый из этих отрезков стирается в одном направлении. Тогда точка v_0 на ребре v_1v_2 равноудалена от дальних точек $f_1 \in U'_1$ и $f_2 \in U'_2$. Через эту точку проходят две пары кривых, одна из которых соответствует множеству U'_1 , а другая — множеству U'_2 и в ней закончится процесс стирания скелета (рис. 16). Это предположение можно обобщить на случай, когда точка v_0 является вершиной скелета: через вершину проходит n пар различных стирающих кривых, где n — степень вершины.

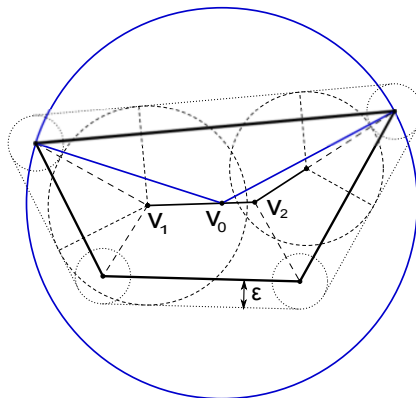


Рис. 16: Центральная точка скелета.

Определение 9. Точка скелета фигуры называется центральной, если максимальный пустой круг с центром в ней разбивает границу точками касания на n фрагментов и эта точка равноудалена от каждой из дальних точек $f_i \in U'_i, i = 1, \dots, n$.

Возможна и ситуация, когда центральная точка является точкой нарушения связности. На рис. 17 приведен пример симметричной фигуры с такой точкой: в этой точке происходит разделение скелета на две части, стирание каждой из которых заканчивается в точке касания параболического ребра и стирающей кривой. Отметим, что в данном случае все точки ребра, на котором лежит точка нарушения связности, являются центральными.

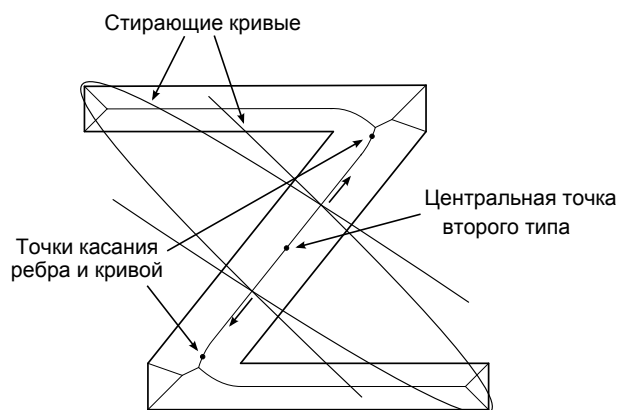


Рис. 17: Центральная точка скелета 2-го типа.

Определение 10. Центральная точка скелета фигуры называется центральной точкой 1-го типа, если в ней заканчивается стирание ребра. Центральная точка, в которой происходит нарушение связности, называется центральной точкой 2-го типа.

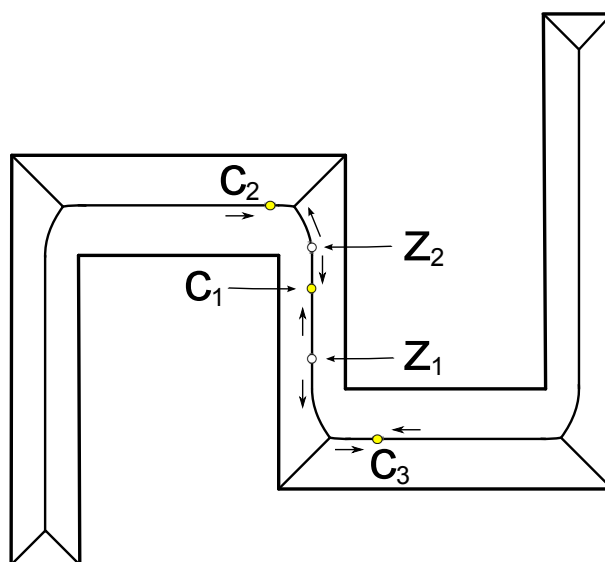


Рис. 18: Пример скелета фигуры с тремя центральными точками 1-го типа.

Заметим, что в случае наличия в скелете точек нарушения связности, центральных точек 1-го типа может быть несколько. На рис. 18 изображена фигура, при стирании скелета которой произойдет нарушение связности в двух точках z_1 и z_2 , в результате чего базовый скелет разделится на три фрагмента. Каждый из этих фрагментов содержит свою центральную точку 1-го типа (c_1, c_2, c_3) , в которой закончится стирание фрагмента.

Разметка скелета

Итак, при росте ε ребра базового скелета стираются парами кривых — парабол и гипербол. Состав пары и положение стирающих кривых для каждого ребра v зависит от типа и положения порождающих ребро элементов границы, наиболее удаленной от v вершины $f \in U'$ и величины ε . При этом ребро скелета может стираться несколькими парами кривых, поскольку вершина f может быть различной для разных фрагментов ребра v . На ребре может находиться точка касания ребра и стирающей кривой, в которой заканчивается либо начинается (в зависимости от типа порождающих ребро элементов границы) стирание ребра скелета одной парой кривых в противоположных направлениях. Отдельный тип представляют собой центральные точки, в которых заканчивается или начинается стирание ребра двумя парами кривых, порожденными разными множествами вершин границы.

Определение 11. *Разметка скелета — это множество точек скелета, в которое входят:*

- вершины скелета;
- точки смены пары стирающих кривых;
- точки касания стирающей кривой и ребра;
- центральные точки скелета 1-го и 2-го типов.

При этом каждой точке множества сопоставлен набор значений точности $\{\varepsilon_i\}$, $1 \leq i \leq n$ (для вершины скелета n равно степени этой вершины, для внутренней точки ребра n равно 2), при которых соответствующие стирающие кривые проходят через данную точку.

Будем рассматривать точки разметки как вершины скелета. В результате получим размеченный скелет (рис. 19), каждое ребро которого стирается одной парой кривых в одном направлении. При этом с каждым ребром связаны два значения точности ε , при которых стирающая пара проходит через концевые точки ребра.

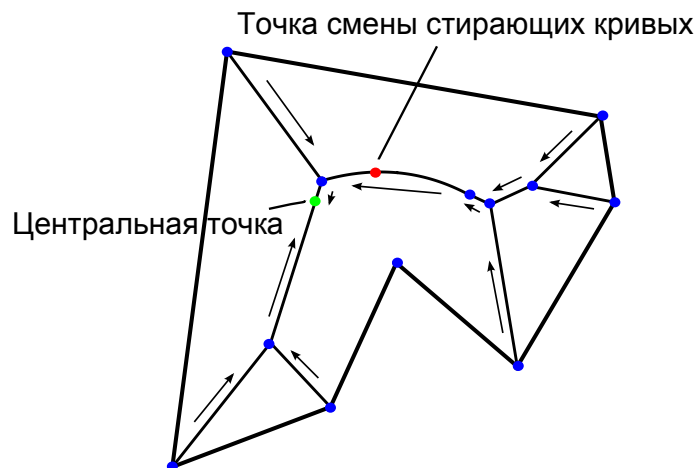


Рис. 19: Размеченный скелет.

Непрерывность изменения базового скелета

Исследуем процесс движения точки пересечения стирающей кривой и ребра скелета. Сначала рассмотрим случай, когда ребром скелета является отрезок, порожденный парой сегментов границы, а стирающими кривыми — две параболы. Будем рассматривать систему координат с центром в фокусе стирающей параболы и осью абсцисс, параллельной директрисе параболы и лежащей на расстоянии $r + 2\varepsilon$ от нее, где r — расстояние от

сегмента границы до наиболее удаленной точки (в рассматриваемой системе — начала координат). Тогда уравнение стирающей параболы можно записать в виде:

$$y + \frac{r + 2\varepsilon}{2} = \frac{x^2}{2(r + 2\varepsilon)}$$

Обозначим отрезок, являющийся ребром скелета, $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$. Уравнение прямой, проходящей через концевые точки ребра, запишем в виде $y = kx + b$, где $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $b = y_1 - kx_1$. (Заметим, что в выбранной системе координат $x_1 \neq x_2$, так как отрезок $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ не может быть перпендикулярен порождающему его сегменту границы, а значит, и директрисе параболы.) Координата x точки пересечения параболы и отрезка — это решение уравнения

$$x^2 - 2tkx - t^2 - 2tb = 0 \quad (1)$$

где $t = r + 2\varepsilon$. Корни этого уравнения имеют вид:

$$x^\pm(t) = tk \pm \sqrt{t^2(k^2 + 1) + 2tb} \quad (2)$$

Парабола пересекает отрезок при $t \geq -\frac{2b}{k^2+1}$. Очевидно, что $x^\pm(t)$ непрерывны. Координата y точки пересечения линейно зависит от x , и, следовательно, точки пересечения движутся по прямой непрерывно.

Рассмотрим случай, когда ребром скелета является отрезок, порожденный парой вершин границы, а парой стирающих кривых являются две гиперболы. Будем рассматривать систему координат, такую, что прямая, проходящая через фокусы гиперболы совпадает с осью Ox , а центр системы координат лежит в середине отрезка, соединяющего фокусы. Тогда уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{\varepsilon^2} - \frac{y^2}{r^2 - \varepsilon^2} = 1 \quad (3)$$

где r — половина расстояния между фокусами, $0 < \varepsilon < r$. Уравнения асимптот этой гиперболы имеют вид:

$$y = \pm \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} x$$

Уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , запишем в виде $y = kx + b$ (ситуацию когда $x_1 = x_2$ рассмотрим отдельно). Тогда уравнение для координаты x точки пересечения гиперболы с прямой имеет вид:

$$(r^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^2 k^2)x^2 - 2kb\varepsilon^2 x - b^2\varepsilon^2 - \varepsilon^2(r^2 - \varepsilon^2) = 0 \quad (4)$$

Если $r^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^2 k^2 \neq 0$, то корни уравнения можно записать в виде:

$$x^\pm = \frac{kb\varepsilon^2 \pm \varepsilon \sqrt{(r^2 - \varepsilon^2)(b^2 + r^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^2 k^2)}}{r^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^2 k^2} \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon > \sqrt{\frac{r^2 + b^2}{k^2 + 1}}$ гипербола не пересекает прямую, при $\varepsilon = \sqrt{\frac{r^2 + b^2}{k^2 + 1}}$ прямая касается гиперболы, при $\varepsilon < \sqrt{\frac{r^2 + b^2}{k^2 + 1}}$ гипербола пересекает прямую в двух точках.

При $r^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^2 k^2 = 0$, то есть при значении точности

$$\varepsilon^* = \frac{r}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (6)$$

квадратное уравнение (4) обращается в линейное, решение которого имеет вид:

$$x^* = \frac{-r^2 k^2 - b^2 - b^2 k^2}{2kb(k^2 + 1)} \quad (7)$$

Геометрический смысл этого случая заключается в том, что прямая параллельна одной из асимптот гиперболы.

Пусть $k \neq 0, b \neq 0$. Рассмотрим движение точек пересечения для случая $k > 0, b < 0$ (в остальных случаях рассуждения аналогичны) (рис. 20). Обозначим угол наклона прямой $\alpha \in (0, \pi/2)$, угол наклона асимптоты, лежащей в первой четверти, $\beta \in (0, \pi/2)$, а точки пересечения $p_1 = (x_{p_1}, y_{p_1})$ и $p_2 = (x_{p_2}, y_{p_2})$. Если $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, то $\alpha < \beta$, $x_{p_2} = x^- < 0 < x_{p_1} = x^+$. При увеличении ε расстояние между вершинами гиперболы увеличивается, а угол β между асимптотой и осью Ox уменьшается. При этом значение $x_{p_1} = x^+$ увеличивается, а $x_{p_2} = x^-$ уменьшается. Когда значение β достигает значения α (и асимптота становится параллельна прямой), прямая лежит ниже асимптоты и, следовательно, не имеет пересечения с левой ветвью гиперболы. Это значит, что при точности ε^* существует только одна точка пересечения с координатой $x_{p_1} = x^*$.

Нетрудно показать, что при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* x^+ \rightarrow x^*$. Рассмотрим x^+ в (5) как отношение двух функций от ε :

$$x^+(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}$$

Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*} g(\varepsilon) = 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*} f(\varepsilon) = 0$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*} x^+(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*} \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} = \frac{-k^2 r^2 - b^2 - k^2 b^2}{2kb(k^2 + 1)} = x^*$$

При дальнейшем уменьшении β снова возникнет вторая точка пересечения p_2 , лежащая правее p_1 на той же ветви гиперболы, то есть $x_{p_2} = x^- > x_{p_1} = x^+ > 0$. При дальнейшем уменьшении β x_{p_1} будет увеличиваться, а x_{p_2} — уменьшаться до тех пор, пока их значения не совпадут (в этот момент прямая будет касаться гиперболы).

Таким образом, если заданный отрезок пересекается с левой ветвью гиперболы (лежит в отрицательной полуплоскости по x), то при $\varepsilon < \varepsilon^*$ точка пересечения движется непрерывно, а при $\varepsilon \geq \varepsilon^*$ пересечений нет. Если отрезок лежит в положительной полуплоскости, то при $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ может быть только одна точка пересечения и она движется непрерывно, а при $\varepsilon > \varepsilon^*$ точек пересечения может быть две, и обе они движутся непрерывно. Координаты x точек пересечения можно записать в виде:

$$x_{p_1} = \begin{cases} x^+, & \text{если } \varepsilon \neq \varepsilon^* \\ x^*, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon^* \end{cases}$$

$$x_{p_2} = x^-, \varepsilon \neq \varepsilon^*$$

Если $k \neq 0, b = 0$, то при точности ε^* одна из асимптот совпадет с прямой, следовательно, при $\varepsilon \geq \varepsilon^*$ гипербола не будет пересекать прямую. При $\varepsilon < \varepsilon^*$ гипербола пересекает

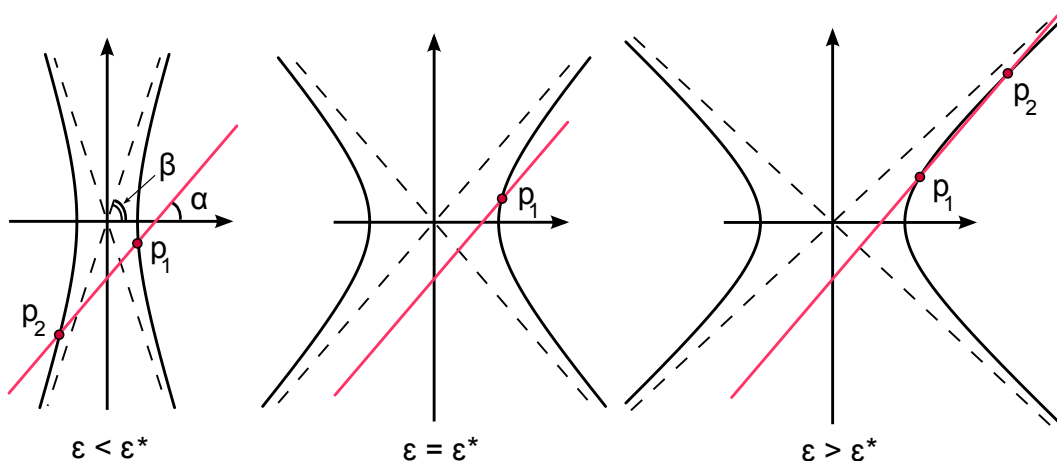


Рис. 20: Точки пересечения стирающей гиперболы и прямой.

прямую в двух точках с координатами x^\pm , лежащих на разных ветвях. Таким образом, и в этом случае точки пересечения движутся непрерывно.

Если $k = 0$, то гипербола также пересекает прямую в двух точках с координатами x^\pm , лежащих на разных ветвях.

Для случая прямой $x = c$ уравнение координат y точек пересечения имеет вид:

$$y^\pm = \pm \frac{\sqrt{(r^2 - \varepsilon^2)(c^2 - \varepsilon^2)}}{\varepsilon}.$$

Здесь при $\varepsilon \leq c$ гипербола пересекает прямую, иначе пересечений нет.

Таким образом, движение точки пересечения стирающей гиперболы и ребра носит непрерывный характер.

Теперь рассмотрим движение точки пересечения двух парабол. Напомним, что директрисы парабол параллельны, а фокусы лежат по одну сторону от директрисы скелетной параболы и не совпадают. Будем рассматривать систему координат с центром в фокусе стирающей параболы и осью Ox , параллельной директрисам. Уравнение для координаты x точки пересечения имеет вид:

$$(q - t)x^2 + 2tx_0x - t(x_0^2 + tq + 2qy_0 - q^2) = 0 \tag{8}$$

где $t = r + 2\varepsilon$, q - расстояние между сегментом и вершиной (x_0, y_0) границы. Отметим, что $q - y_0 = r$. При увеличении значения точности ε директриса стирающей параболы удаляется от фокуса, то есть увеличивается фокальный параметр t параболы. При этом фокальный параметр q другой параболы остается неизменным. При совпадении значений фокальных параметров $t^* = q$ параболы имеют только одну точку пересечения:

$$x^* = \frac{x_0}{2} + \frac{qy_0}{x_0}. \tag{9}$$

При $t \neq q$ корни уравнения (8) имеют вид:

$$x^\pm = \frac{-tx_0 \pm \sqrt{qt(x_0^2 + 2y_0(q - t) - (q - t)^2)}}{(q - t)} \tag{10}$$

Параболы пересекаются при $t \in [r, r + \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)}]$. При $t < q$ точки пересечения парабол p_1 и p_2 лежат на разных ветвях скелетной параболы. Предположим, что $x_0 > 0$ (для

случая $x_0 < 0$ рассуждения аналогичны). Тогда $x_{p_2} = x^- < 0 < x_{p_1} = x^+$. При увеличении t x_{p_1} увеличивается, x_{p_2} — уменьшается. Когда значение t достигает значения q , $x_{p_1} = x^*$. Аналогично случаю пересечения гиперболы и прямой, при $t \rightarrow q$ $x^+ \rightarrow x^*$:

$$\lim_{t \rightarrow q} x^+(t) = \lim_{t \rightarrow q} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{x_0}{2} + \frac{qy_0}{x_0} = x^*.$$

При $t > q$ у парабол снова две точки пересечения, которые сходятся в точку касания парабол при $t \rightarrow r + \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)}$.

Координаты x точек пересечения парабол p_1 и p_2 можно представить в следующем виде:

$$x_{p_1} = \begin{cases} x^+, & \text{если } t \neq q \\ x^*, & \text{если } t = q \end{cases}$$

$$x_{p_2} = x^-, t \neq q$$

Если $x_0 = 0$, то $t > q$ и $y_0 < 0$. В этом случае параболы пересекаются при $t \leq r + |y_0|$ и координаты x точек пересечения изменяются следующим образом:

$$x^\pm = \pm \sqrt{\frac{qt(t + 2y_0 - q)}{(q - t)}}.$$

Таким образом, мы показали, что точки пересечения стирающей кривой и ребра скелета движутся непрерывно при изменении ε .

Рассмотрим базовый скелет фигуры P при некотором значении точности ε_1 , $S_{base}(P, \varepsilon_1)$. Увеличим значение точности на достаточно малую величину до ε_2 . При этом будут стерты фрагменты терминальных ребер базового скелета $S_{base}(P, \varepsilon_1)$. Хаусдорфово расстояние между базовыми скелетами $S_{base}(P, \varepsilon_1)$ и $S_{base}(P, \varepsilon_2)$ будет равно максимальному из расстояний между терминальными вершинами скелетов, лежащих на одном ребре размеченного скелета. Нетрудно видеть, что, в силу непрерывного характера движения точек пересечения стирающих кривых с ребрами скелета, малое изменение точности ведет к малому изменению расстояния Хаусдорфа между соответствующими базовыми скелетами.

Пусть E — множество значений точности аппроксимации. Из приведенных рассуждений следует

Теорема 3. *Базовый скелет односвязной многоугольной фигуры непрерывно зависит от точности аппроксимации ε в смысле расстояния Хаусдорфа: $\forall \omega > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E : |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| < \sigma \Rightarrow H(S_{base}(P, \varepsilon_1), S_{base}(P, \varepsilon_2)) < \omega$.*

Параметрическое семейство базовых скелетов

Таким образом, с многоугольной фигурой связано семейство базовых скелетов, соответствующих различным значениям точности аппроксимации. Размеченный скелет позволяет описать поведение этого семейства в целом и строить базовые скелеты для требуемых значений точности.

Алгоритм построения базового скелета для заданных значений точности аппроксимации состоит в следующем. Для каждого ребра размеченного скелета со значениями точности в концевых точках ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) проверяется выполнение условий:

- если $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, то ребро целиком принадлежит базовому скелету;
- если $\varepsilon > \varepsilon_2$, то ребро не принадлежит базовому скелету;

- если $\varepsilon_1 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, то базовому скелету принадлежит та часть ребра, для точек которой значение точности больше либо равно ε — то есть от точки пересечения ребра со стирающей кривой при точности ε до концевой точки с точностью ε_2 .

С семейством базовых скелетов связано семейство гранично-скелетных моделей [8]. Скелетной частью таких моделей является базовый скелет, а граничная часть представляет собой границу объединения множества всех базовых кругов и отражает те свойства границы, которые являются существенными в пределах точности аппроксимации. Такое семейство является аналогом концепции масштабируемой кривизны границы (curvature scale space) [11] — подхода, основанного на аппроксимации границы кусочно-гладкой кривой, сглаживании этой кривой с помощью фильтра Гаусса и выявлении экстремумов или нулей кривизны границы при разных степенях сглаживания. Для анализа такого семейства используется размеченный скелет, а также оценки значимости для вершин выпуклых углов многоугольника — значения точности аппроксимации, при которых соответствующие вершинам выпуклые особенности перестают быть существенными [12].

Выводы

В работе проведено исследование свойств базового скелета односвязной многоугольной фигуры. Доказана монотонность и непрерывность изменения базового скелета при увеличении величины точности аппроксимации. Для описания процесса изменения базового скелета предложена разметка скелета — множество скелетных точек, соответствующих существенным изменениям базового скелета. Применение устойчивой скелетной модели, основанной на скелете аппроксимирующего многоугольника, позволяет использовать корректные и вычислительно эффективные процедуры скелетизации. Монотонность и непрерывность изменения позволяют рассматривать поведение семейства базовых скелетов в целом и выбирать скелетные модели с нужной точностью аппроксимации. Кроме того, семейство базовых скелетов позволяет строить масштабируемое граничное представление формы, описывающее свойства границы, проявляющиеся при различных степенях детализации, и не требующее применения аппроксимации контура кривыми высших порядков.

Литература

- [1] *Blum H.* A transformation for extracting new descriptors of shape // *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, MIT Press, 1967. — P. 135-143.
- [2] *Shaked D., Bruckstein A.M.* Prunnig medial axes // *CVIU 1998 - Vol.69, No. 2*, pp. 156-169.
- [3] *Choi S., Lee S. W.* Stability Analysis of Medial Axis Transform under Relative Hausdorff Distance. CAVR-TR-99-23, Korea University, 1999.
- [4] *Chazal F, Lieutier A.* The λ -medial axis // *Graphical Models*, 67(4):304–331, July 2005.
- [5] *Domakhina L., Okhlopkov A.* Shape comparison based on skeleton isomorphism // *Proceedings of International conference on computer vision theory and applications (VISAPP 2009)*, Lisbon, Portugal, 2009.
- [6] *Местецкий Л. М.* Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры — Москва: Физматлит, 2009. — 288 с.
- [7] *Местецкий Л. М., Рейер И. А.* Непрерывное скелетное представление изображения с контролируемой точностью // *Труды 13 международной конф. ГРАФИКОН-2003*, Москва, 2003, с. 246-249.
- [8] *Жукова К. В., Рейер И. А.* Параметрическое семейство гранично-скелетных моделей формы // *Математические методы распознавания образов: 14-я Всероссийская конференция. Владимирская обл., г. Суздаль, 21–26 сентября 2009 г.: Сборник докладов*, с. 346-350.

- [9] *Жукова К. В., Рейер И. А.* Структурный анализ формы объекта с помощью скелетного ядра // Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. Республика Кипр, г.Пафос, 17–24 октября 2010 г.: Сборник докладов, с. 350-354.
- [10] *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение — Москва: Мир, 1989. — 478 с.
- [11] *Abbasi S., Mokhtarian F., Kittler J.* Curvature scale space image in shape similarity retrieval, MultiMedia Systems, Vol.7, 1999, pp. 467–476.
- [12] *Жукова К. В., Рейер И. А.* Параметрический дескриптор формы на основе гранично-скелетной модели // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция, г.Петрозаводск, 11–17 сентября 2011 г.: Сборник докладов, с. 408-411.